

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Український фізико-математичний лицей Київського національного університету
імені Тараса Шевченка

XXIV Всеукраїнська учнівська Інтернет-олімпіада з фізики
2024/2025 навчального року
II (фінальний) етап Експериментальний тур
11 клас
Задача 1.

Обладнання: штатив, нитка (2 м), маленький магніт, дві металеві пластини різної товщини, які виготовлені з різних металів, 2 аркуші міліметрового паперу, маленький шматочок пластиліну, штангенциркуль, секундомір, лінійка.

Завдання:

- А) запропонувати теоретично обґрунтовану методику знаходження відношення питомих опорів металів, з яких виготовлені пластинки.
Б) Експериментально знайти це відношення.
В) Опишіть механізм проведення вимірювань та дії по збільшенню точності.

Задача 2.

Обладнання: дві тенісні кульки, одна половинка тенісної кульки, що заповнена пластиліном, скотч (не віскі), два листи білого паперу, нитка, дерев'яна дошка, штатив, лінійка, секундомір, електронні ваги, штангенциркуль.

Завдання:

- А) **Визначіть** коефіцієнт тертя матеріалу цілої (!) кульки з листом білого паперу.
Увага! В цьому пункті використовувати можна лише цілі кульки.
Б) **Приведіть** половинку кульки з пластиліном у виключно обертальний рух навколо осі симетрії на листі білого паперу. Знайдіть якомога точніше момент сили тертя з боку білого паперу, що гальмує кульку. Опором повітря під час обертання нехтуємо.
В) **Оцініть** «плече» d сили тертя, що гальмує напівкульку в попередньому пункті, уявивши, що сила тертя, що створює гальмуючий момент, визначається силою тертя ковзання і прикладена на відстані d від осі обертання напівкульки. Таким чином, **оцініть** характерний розмір плями дотику напівкульки до листа паперу.
Г) **Проаналізуйте причини**, що могли вплинути на точність визначення результатів в попередніх пунктах.

Задачі підготували: Орлянський О.Ю., Олійник А.О., Пашко М.І., Триліс О.В.

Розв'язки

Задача 1.

Для розв'язку цієї експериментальної задачі можуть існувати різні підходи, але більшість з них зводиться до того, що треба вимірювати затухання коливання математичного маятника із магнітом на кінці, який коливається біля пара- або діамагнітних металевих пластинок. Затухання коливань провокуються появою струмів Фуко в товщі цих металів.

Ми покажемо дві основні можливі теоретичні моделі та постановки експериментів у випадку використання математичного маятника.

В обох моделях треба за нитку пластиліном підвісити магніт на кільцевий тримач або лапку штатива, а на певній відстані під магнітом розташувати металеву пластинку. Важливо стежити за тим, щоб магніт не знаходився близько до залізних елементів штативу, парти чи підлоги. За можливості, для цього найкращим варіантом є коливати магніт не поблизу поверхні парти (адже це означає, що десь поблизу знаходиться і залізна основа штатива), спустити нитку до підлоги і покласти металеву пластинку на лист міліметрового паперу, на якому зручно фіксувати положення пластинки та робити відмітки для подальшого стеження за амплітудою коливань магніту.

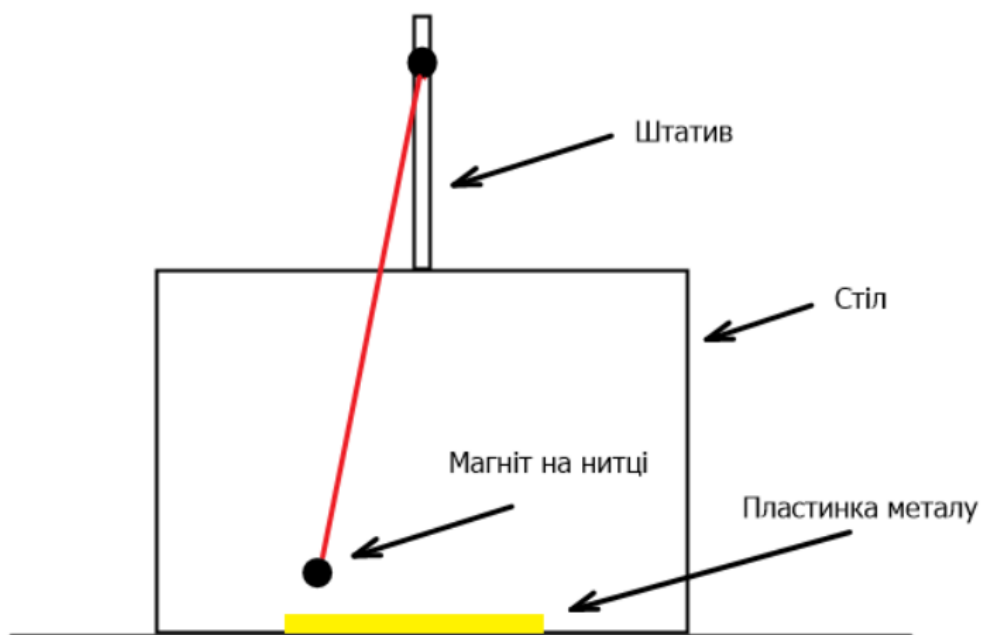


Рис. 1

Перша модель. В даній моделі досліджуються коливання магніта з невеликою амплітудою, яка сильно не перевищує довжину металевих пластинок.

Однією з причин затухання коливань магніта біля металеві пластинки є виникнення індукційних струмів Фуко через те, що при русі магніта змінюється потік магнітного поля через різні перерізи пластинки. Тобто, частина механічної енергії магніта розсіюється на тепло, яке виникає через протікання індукційних струмів в пластинці.

Потужність теплових втрат в металі дорівнює:

$$P = \frac{\varepsilon^2}{R},$$

де $\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ це характерне індукційне ЕРС, яке виникає в металі. де Φ це магнітний потік через контур, а R - характерний опір контура струму. Як видно з рисунку 2 є 3 основних види струмів, які паралельні граням пластинки, що можуть виникати в пластинках. Вияснимо чому пропорційна потужність втрат для кожного із цих струмів.

ЕРС індукції визначається як магнітним полем, так і геометрією контуру зі струмом:

$$\varepsilon = -S \frac{\Delta B_{\perp}}{\Delta t},$$

де S – площа контуру, B_{\perp} – складова магнітної індукції, перпендикулярна до площини контуру. Щоб оцінити залежність теплових втрат від товщини платівок, необхідно знати вид контурів вихрових струмів у пластинках. Розглянемо три різні варіанти такого розташування струмів. Нехай платівка має розміри $a \times b \times h$ (див. Рис. 2), причому $a \sim b$, а $h \ll a$. Опір контуру визначається за формулою $R = \rho l / S'$, де l і S' - ефективні довжина і площа перерізу струму, а ρ – шуканий нами питомий опір матеріалу.

Тоді для потужності втрат $P = \frac{\varepsilon^2}{R} = \frac{1}{R} \left(S \frac{\Delta B_{\perp}}{\Delta t} \right)^2 = \frac{S^2 S'}{\rho l} \left(\frac{\Delta B_{\perp}}{\Delta t} \right)^2$ у кожному із трьох випадків циркуляції струмів (див. рис.2) отримаємо такі вирази

$$P_{ab} \sim \left(\frac{\Delta B_{\perp}}{\Delta t} \right)^2 \frac{a^5 h}{\rho a}$$

$$P_{ah} \sim P_{bh} \sim \left(\frac{\Delta B_{\perp}}{\Delta t} \right)^2 \frac{a^5}{\rho} \left(\frac{h}{a} \right)^3 \sim P_{ab} \left(\frac{h}{a} \right)^2$$

Оскільки $h/a \approx 1/20$, то потужність втрат P_{ab} при циркуляції струму в площині ab за величиною на два порядки перевищує потужність втрат у двох інших випадках. Звичайно, для різних площин можуть відрізнятися невідомі нам значення $\Delta B_{\perp} / \Delta t$, але оскільки поле магніту дуже неоднорідне, при його русі над пластинкою будуть змінюватися всі компоненти поля, тому для різних орієнтацій контурів струмів $\Delta B_{\perp} / \Delta t$ не повинно відрізнятися. За бажання уникнути цієї невизначеності можна провести кілька вимірювань, по-різному закріплюючи магніт на нитці (змінюючи положення його полюсів), але так чи інакше очевидно, що основні втрати будуть давати струми у площині ab .

Додамо також, що $\Delta B_{\perp} / \Delta t$ пропорційне до швидкості руху магніта, адже в кожній точці пластинки перпендикулярна компонента магнітного поля міняється в часі наступним чином

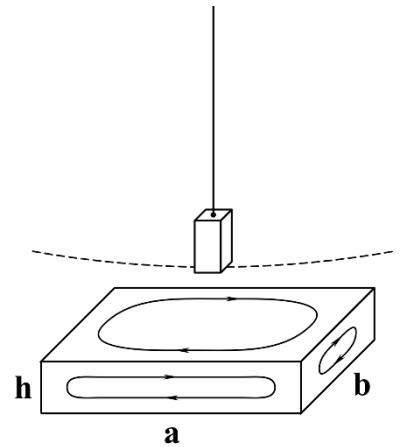


Рис. 2

$$\frac{dB_{\perp}(\vec{r}(t) - \vec{r}_0)}{dt} \sim B'_{\perp}(\vec{r}(t) - \vec{r}_0) * \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = B'_{\perp}(\vec{r}(t) - \vec{r}_0) * |\vec{v}|,$$

де $\vec{r}(t)$ – радіус-вектор положення магніта, \vec{r}_0 – координата довільної точки пластини.

Звідси ми бачимо, що зміна потоку магнітного поля за одиницю часу буде пропорційна до швидкості руху магніта та пропорційна до певної функції положення магніта. Далі для сильного спрощення будемо вважати, що цю функцію положення магніта можна не враховувати і вважати, що зміна потоку пропорційна лише швидкості магніта. Треба ще раз підкреслити, що в умовах даної задачі, особливо враховуючи, що металеві пластинки є невеликими, це дійсно є сильним спрощенням реальних складних ефектів. Трохи мінімізувати відхилення нашої моделі від реальності можна створюючи коливання магніту лише невеликої амплітуди, яка є порядку розміру половини довжини пластинки, або ненабагато її перевищує. Дана модель очевидно має свої недоліки, проте дозволяє досліджувати велику зміну амплітуди коливання, що важливо для експерименту і спрощує зняття даних.

Врешті-решт, об'єднуючи викладені вище міркування можемо сказати, що потужність втра

$$P \sim \frac{v^2 h}{\rho}.$$

Тоді модуль сили, що гальмує магніт $F_{\text{магн опору}} \sim \frac{P}{v} = \frac{vh}{\rho}$.

Тоді виникає ідея, що можна описувати затухання коливань від тертя з повітрям як силу, яка теж пропорційна першому ступеню швидкості.

Отже, можемо сказати, що ми маємо коливання із затуханням, де сили опору руху пропорційні швидкості, а значить з теорії коливань можна стверджувати, що амплітуда коливань затухає в часі по експоненційному закону:

$$A(t) = A_0 * e^{-\beta t},$$

де $\beta = \beta_{\text{повітря}} + \beta_{\text{магнітна}} = \beta_{\text{повітря}} + k \frac{h}{\rho}$, тут k – деякий коефіцієнт пропорційності.

Тоді виникає ідея проведення досліду. Відмічаємо на міліметровці, на якій лежить пластинка, два положення, які відповідають початковій і кінцевій амплітуді коливання маятника, як зображено на рисунку 3 (але тільки бажано не робити початкову амплітуду значно більшою за розмір пластинки).

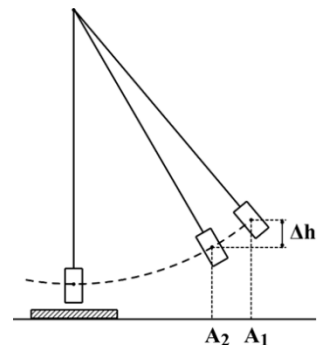


Рис. 3

Час затухання коливань між цими положеннями обернено пропорційний до β : $t \sim \frac{1}{\beta}$. Значить можна провести 3 групи вимірювань: (1) маятник коливається без пластинок під ним, а отже його амплітуда коливань зменшується лише повітрям за час $t_0 \sim \frac{1}{\beta_{\text{повітря}}}$; (2) маятник коливається над першою (мідною) пластинкою і $t_M \sim \frac{1}{\beta_{\text{повітря}} + k \frac{h_M}{\rho_M}}$; (3) маятник коливається над другою (алюмінієвою) пластинкою і $t_a \sim \frac{1}{\beta_{\text{повітря}} + k \frac{h_a}{\rho_a}}$. Звідси

легко отримати, що

$$\frac{\rho_M}{\rho_a} = \frac{(t_0 - t_a) t_M h_M}{(t_0 - t_M) t_a h_a}.$$

Товщини пластинок легко вимірюються штангенциркулем. Часи затухання (зменшення амплітуди) мають в усіх трьох випадках вимірюватись між однаковими крайніми (початковою та кінцевою) амплітудами. Бажано один і той самий час вимірювати хоча б 5-10 разів для покращення точності. Стежити за зміною амплітуди коливань зручніше всього стоячи і дивлячись зверху вниз майже вздовж нитки маятника, тоді буде гарно видно граничні мітки амплітуд і чітке горизонтальне положення магніту. Також під час проведення експерименту треба дослідним шляхом підібрати таку висоту магніта над пластинками, щоб, з одного боку, затухання не відбувалось дуже швидко, але й висота не може бути сильно великою, адже тоді магнітне затухання буде дуже слабким і ми матимемо затухання майже виключно під дією опору повітря.

Друга модель. Дана модель схожа на першу, але для вимірювання використовуються значно більші амплітуди коливань маятника, ніж в першій моделі. Проте, для цієї моделі принципово, що зміна амплітуди, час якої вимірюється, має бути невелика, що може вносити свої незручності.

Легко переконатись, що період коливань маятника від матеріалу пластинки практично не залежить. Як виміряти втрати енергії? За час одного коливання енергія втрачається нерівномірно, тому зручною характеристикою може бути величина середньої потужності втрат енергії за період T

$$P = \frac{mg\Delta h}{T}$$

де m – маса магніту, Δh – різницю висот двох послідовних максимальних відхилень маятника в одному із крайніх положень. Але Δh мале і незручне для виміру. Найзручніше вимірювати проекцію крайніх положень магніту на горизонтальну площину підлоги. Однак і в цьому випадку похибка експерименту буде все ж таки досить високою. Для підвищення точності треба дозволити магніту зробити побільше коливань. Щоб втрати енергії за кожен період при цьому були приблизно рівними, необхідно, щоб за час вимірювань зміна амплітуди була малою порівняно з самою амплітудою ($\Delta A \ll A$). Цей спосіб дозволяє зробити амплітуди коливань доволі великими, як на рисунку 3. При цьому можливі два підходи до знаходження P : вимірювати зміну амплітуди за фіксований час або вимірювати час, за який змінюється амплітуда на фіксоване значення. Другий підхід здається значно зручнішим. Отже як і в першому випадку, буде вимірюватись час зменшення амплітуди між двома завчасно визначеними положеннями.

Ці міркування призводять до наступної схеми експерименту (див. Рис. 3). На лінії коливання маятника відзначаємо дві досить близькі точки A_1 та A_2 – початкову та кінцеву амплітуди коливань. Потім в одне і те саме місце під маятником кладемо металеві пластинки і з кожною з них проводимо один і той же експеримент, вимірюючи часи t_0, t_1, t_2 , за які амплітуда коливань в кожному з випадків зміниться від A_1 до A_2 . Така схема експерименту дозволяє врахувати опір повітря. Коливання маятника над металевою пластинкою та без неї має приблизно однакову аеродинаміку, тому однакова і потужність втрат за рахунок опору повітря

$$P_0 = \frac{mg\Delta h}{t_0}$$

Оскільки у всіх вимірах початкова та кінцева амплітуди коливань однакові, зміна механічної енергії маятника $mg\Delta h$ також буде однаковою. Енергія $mg\Delta h$ йде на роботу

проти сил опору повітря (потужність P_0) та на збудження та підтримку індукційних струмів у металах (потужності P_1 та P_2). Таким чином

$$P_1 + P_0 = \frac{mg\Delta h}{t_1}, \quad P_2 + P_0 = \frac{mg\Delta h}{t_2}$$

З вищеведеного легко отримуємо, що

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{(t_0 - t_1)t_2}{(t_0 - t_2)t_1}.$$

Залишається лише встановити зв'язок потужності індукційних втрат із питомим опором металу пластинки. Але ми вже робили це в попередній моделі:

$$P \sim \frac{v^2 h}{\rho}.$$

В даному способі амплітуда коливань доволі велика і можна вважати, що швидкість прольоту над пластинкою (коли народження індукційних струмів найбільш значне) майже стала, тоді

$$P \sim \frac{h}{\rho}.$$

А отже,

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_1(t_0 - t_2)t_1}{h_2(t_0 - t_1)t_2},$$

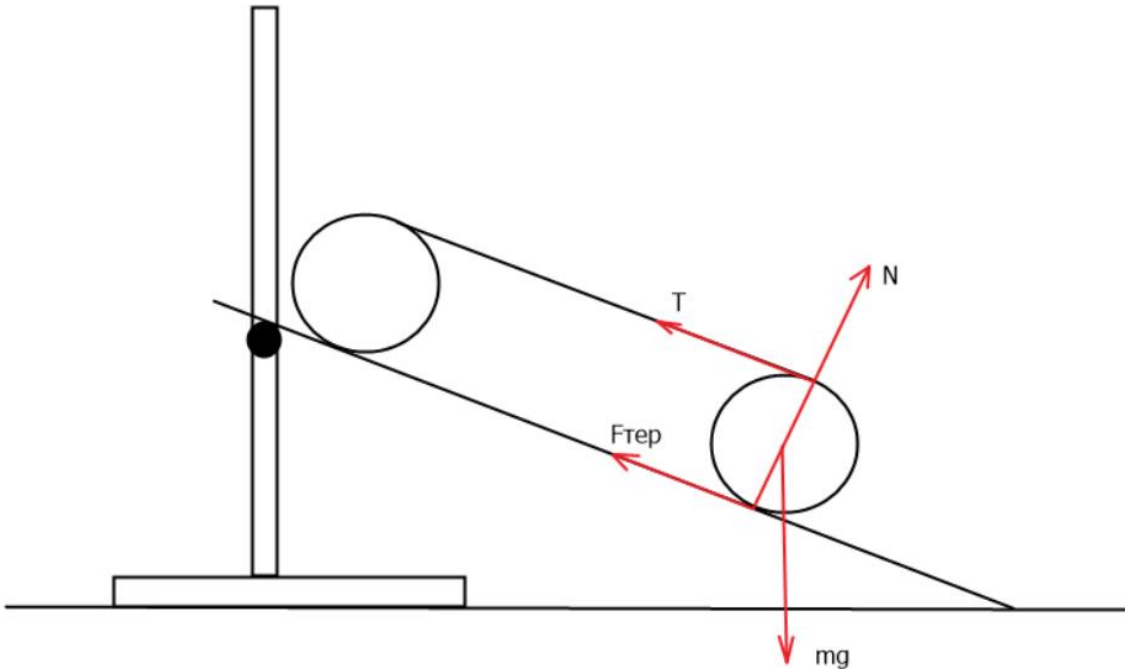
що, до речі, співпадає із формулою в першій моделі.

P.S. В теорії можна було би спробувати побачити відмінність між періодами коливань такого маятника над пластинками та без, адже теорія коливань із затуханням говорить, що такі періоди коливань будуть відрізнятись. Проте, якщо коливання не затухають швидко, то відмінність періодів буде дуже мала, а якщо сильно наблизити магніт до пластинок, то затухання буде дуже швидким і нормально виміряти період буде майже неможливим. Тому, цей спосіб не видається гарним.

P.P.S. Реальне відношення між питомими опорами міді і алюмінію приблизно дорівнює 0.61. Товщини пластинок в задачі були підібрані так, що $\frac{h_m}{h_a}$ вже дає значення близько до 0.75. Тобто, при таких товщинах часи коливань над мідною та алюмінієвою пластинками повинні бути доволі близькими. У авторів задачі в даному експерименті значення відношення питомих опорів вийшло приблизно 0.64.

Задача 2.

А) Можна придумати багато способів вимірювання коефіцієнту тертя круглого тіла із листком паперу. Наприклад можна було б зробити із двох кульок похилу площину (підняти одну кульку по відношенню з іншою на певній відстані між ними по горизонталі), прикріпити лист паперу до дошки і покласти дошку папером на кульки так, щоб до кульок дотикався лише папір та класично шукати кут нахилу, при якому дошка поїде. Але цей експеримент важко робити одному та стабілізувати вузьку дошку на кульках. Також існує ще велика кількість способів, з яких ми докладно опишемо наступний, ідею якого демонструє рисунок.



На верхню поверхню дошки кріпиться аркуш паперу і за допомогою штатива з цієї дошки робиться похила площина. На верхню частину дошки скотчем кріпиться одна тенісна кулька, до верхньої частини якої кріпиться край нитки. Інший край нитки кріпиться до будь-якої точки іншої кульки, на що важливо витратити якомога менше скотчу. Після цього система встановлюється в положення як на рисунку вище. З умов рівноваги нижньої кульки легко вивести, що проковзувати по поверхні дошки вона почне при куті нахилу дошки α , який пов'язаний із коефіцієнтом тертя наступною формулою:

$$\mu = \frac{tg(\alpha)}{2}.$$

Автори задачі отримали значення $\mu \approx 0.2$.

Б) В цьому пункті дуже важливим було натренуватись закручувати кульку так, щоб її центр мас мінімально рухався по поверхні. Момент сили тертя легко вивести з основного закону динаміки обертального руху

$$-M_{\text{тер}} = I\varepsilon,$$

звідки $M_{\text{тер}} = -I * \varepsilon = -\frac{2}{5}mR^2 * \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$. В досліді треба очікувати коли кулька повністю зупиниться, отже $N * 2\pi = \frac{1}{2}|\Delta\omega|\Delta t$, де N – кількість обертів до повного гальмування, Δt – час повного гальмування, $\Delta\omega$ – зміна кутової швидкості при повному гальмуванні.

Звідки, $M_{\text{тер}} = \frac{8}{5} \pi m R^2 N / \Delta t^2$. Маса легко міряється вагами, радіус штангенциркулем, кількість обертів очима та мозком, а час секундоміром. Великі оберти для вимірювання не підходять, адже порахувати кількість обертів в цьому випадку неможливо. Тому час гальмування доволі невеликий, отже бажано робити багато дослідів і результат усереднювати.

В) Характерне плече моменту сили тертя оцінюється елементарно $d = \frac{M_{\text{тер}}}{\mu mg}$, а площа плями $S = \pi d^2$.

Автори виміряли значення для всіх кульок, але тут приведемо значення лише однієї з них, для прикладу:

$$\begin{aligned} M_{\text{тер}} &\approx 2.5 * 10^{-5} \text{ Н * м} \\ d &\approx 0.7 \text{ мм} \\ S &\approx 1.5 \text{ мм}^2 \end{aligned}$$