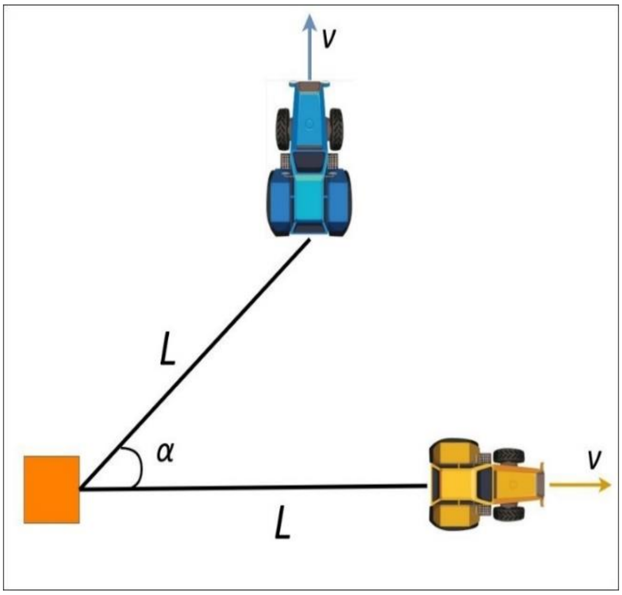
Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Український фізико-математичний ліцей Київського національного університету імені Тараса Шевченка

XXIV Всеукраїнська учнівська Інтернет-олімпіада з фізики
2024/2025 навчального року

II (фінальний) етап Теоретичний тур
10 клас

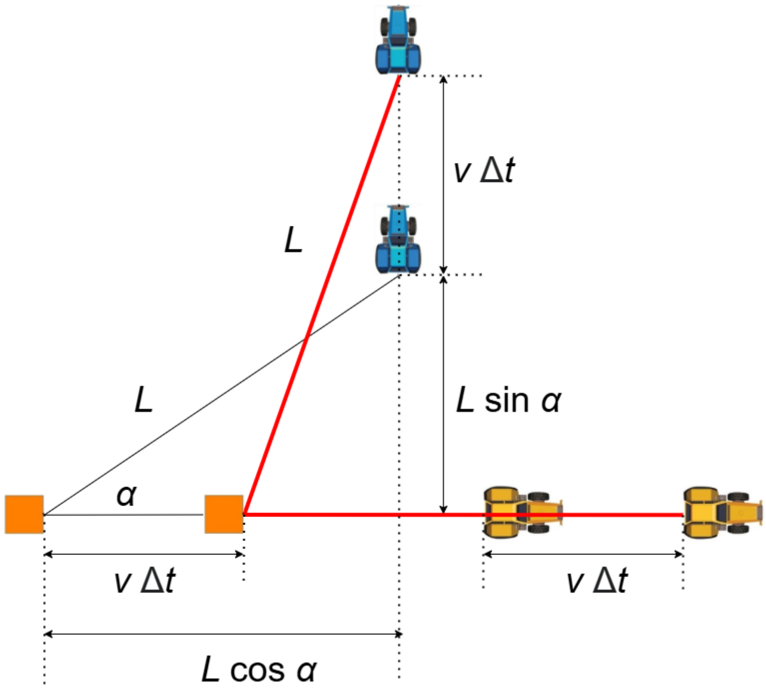
1. ***«Два тра̀ктори мої, два тракторѝ!»***



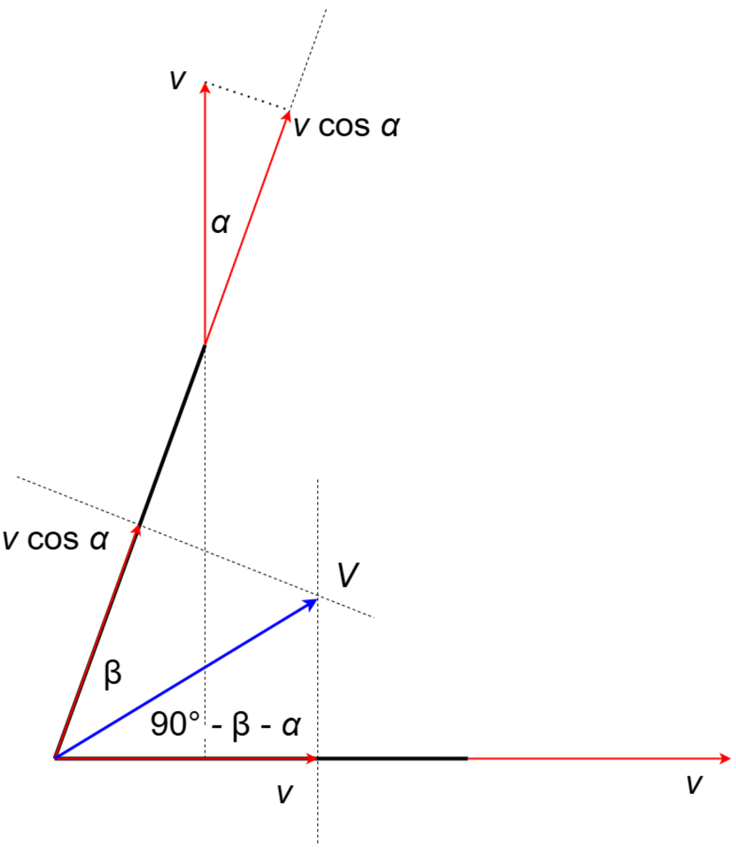
Вантаж прив'язаний за допомогою мотузок довжиною L до двох тракторів: *Синього та Жовтого*. У початковий момент кут між мотузками дорівнює α, як зображено на рисунку, а самі мотузки ледве натягнуті. Трактори одночасно починають рух з однаковою швидкістю v. Трактор *Жовтий* тримає курс вздовж напряму своєї мотузки, а трактор *Синій,* побачивши рух Жовтого, починає рухатися в напрямку, перпендикулярному до початкової швидкості жовтого. **Знайти швидкість руху вантажу** одразу після різкої зміни напрямку цієї швидкості, якщо sin(α) = 5/13.

Розв'язання.

Мотузка *Синього (С)* втратить натяг одразу після початку руху, оскільки відстань між вантажом та *С* буде менша за *L*. Тому вантаж буде рухатись по прямій за трактором *Жовтим (Ж)*, поки мотузка *С* не натягнеться знову. Побудувавши малюнок, можна отримати, що це відбудеться після часу $\Delta t = L(\cos\alpha - \sin\alpha)/v$.



Після цього, малюнок буде виглядати наступним чином



Знайдемо швидкість вантажа *V* з геометрії

$$V \cos(90^\circ - \alpha - \beta) = v$$
$$V \cos \beta = v \cos \alpha$$

$$V(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = v$$

$$V\sin\beta = \sqrt{V^2 - V^2\cos^2\beta} = \sqrt{V^2 - v^2\cos^2\alpha}$$

$$\sin\alpha \cdot v\cos\alpha + \cos\alpha\sqrt{V^2 - v^2\cos^2\alpha} = v$$

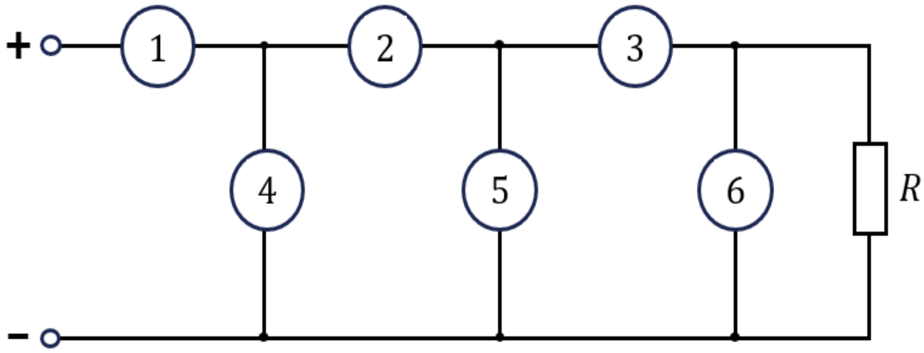
$$\cos\alpha\sqrt{V^2 - v^2\cos^2\alpha} = v(1 - \sin\alpha\cos\alpha)$$

$$V^2\cos^2\alpha - v^2\cos^4\alpha = v^2 - 2v^2\sin\alpha\cos\alpha + v^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$V^2\cos^2\alpha = v^2 + v^2\cos^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - 2v^2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$V = v \cdot \frac{\sqrt{1 - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \boxed{v\frac{\sqrt{193}}{12} = 1.16v = V}$$

2.«Детективна електрика»



Учень, який глибоко засвоїв закони постійного струму, вирішив застосувати для вимірювання опору R резистора аж три однакових амперметра та три однакових вольтметра (він уважає, що так буде надійніше). Учень зібрав коло, схему якого показано на рисунку. Одна біда — він забув написати на схемі, якими номерами позначено амперметри, а якими — вольтметри. А от покази приладів записані: 50 мкА, 200 мкА, 0,8 мА, 24 В, 6 В, 1,5 В. *Придивіться уважно до співвідношення між числовими значеннями показів приладів. Можливо, вам допоможе та закономірність, яку ви побачите.*

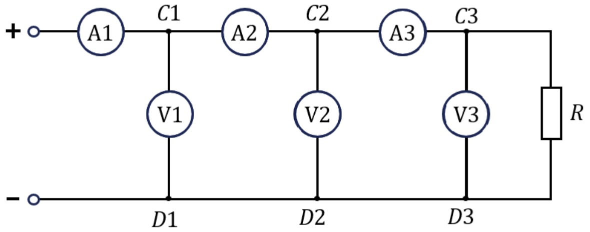
Визначте значення **опору резистора та опори приладів**. Якщо ви вважаєте, що задача має декілька розв'язків, то обмежтеся одним з них.

Розв'язання.

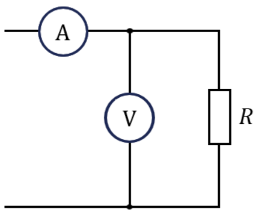
Очевидно, що амперметри та вольтметри не можна вважати ідеальними: їх опори необхідно враховувати під час аналізу кола. Звернімо також увагу, що наведені значення напруги та сили струму можна розглядати як елементи двох геометричних прогресій з *однаковими* знаменниками $q = 0{,}25$. Це нагадує про безкінечні кола з однакових комірок (саме в таких колах напруга та сила струму від комірки до комірки зменшуються саме за таким законом). Така закономірність зберігається і в «обірваному» колі, де замість безкінечної решти кола стоїть резистор з відповідним опором.

Отже, логічною буде спроба пронумерувати прилади так, щоб отримати зліва три однакові комірки, що складаються з амперметра та вольтметра. Це можна зробити лише двома способами.

1) Уважатимемо прилади 1, 2, 3 амперметрами, а 4, 5, 6 — вольтметрами. Отримуємо наведену нижче схему.



Очевидно, покази приладів *зменшуються* зі збільшенням їх номерів. Геометрична прогресія реалізується за умови, що опір показаної нижче ділянки кола дорівнює R. Тоді загальний опір кола теж дорівнюватиме R.



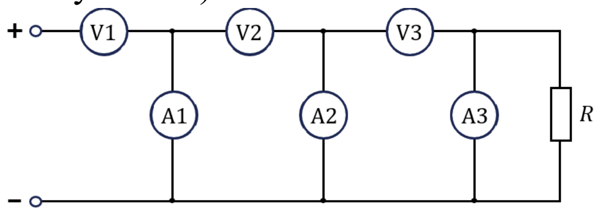
Маємо рівняння $\frac{RR_{\mathrm{V}}}{R+R_{\mathrm{V}}} + R_{\mathrm{A}} = R$.

Урахуємо також, що сила струму через кожний наступний амперметр у 4 рази менша, ніж через попередній. Тобто, наприклад, у точці $C2$ струм ділиться так: ¼ протікає через ділянку кола опором C, а ¾ — через вольтметр V2, приєднаний до цієї ділянки паралельно. Це означає, що $R_{\text{V}} = \frac{R}{3}$. Тоді $R_{\text{A}} = \frac{3R}{4}$.

Оскільки повний опір кола дорівнює R, сила струму в колі (отже, в амперметрі $A2$) дорівнює $\frac{U_0}{R}$, напруга на цьому амперметрі $\frac{U_0}{R} \cdot \frac{3R}{4} = \frac{3U_0}{4}$, а напруга на вольтметрі V1 (за умовою це 24 В) становить $\frac{U_0}{4}$. Тут через U_0 позначено вхідну напругу. Ми бачимо, що $U_0 = 96$ В. Оскільки $\frac{U_0}{R} = 0{,}8$ мА, знаходимо:

$\boldsymbol{R = 120}$ **кОм,** $\boldsymbol{R_{\text{A}} = \frac{3R}{4} = 90}$ **кОм,** $\boldsymbol{R_{\text{V}} = \frac{R}{3} = 40}$ **кОм**.

2) Уважатимемо тепер прилади 1, 2, 3 вольтметрами, а 4, 5, 6 — амперметрами (див. схему нижче).



Ми можемо розглядати цей випадок аналогічно попередньому. У формулах для опору доведеться тільки поміняти місцями R_{V} і R_{A}. Тоді $\frac{RR_A}{R+R_{\text{A}}} + R_{\text{V}} = R$, $R_{\text{A}} = \frac{R}{3}$, $R_{\text{V}} = \frac{3R}{4}$.

З умови випливає, що струм, пройшовши через вольтметр V1, розгалужується: ¾ тече через амперметр $A1$, а ¼ — через вольтметр V2. Отже, струм через V1 дорівнює $\frac{4}{3} \cdot$ 0,8 мА, звідки знаходимо опір вольтметра: $\boldsymbol{R_{\text{V}} = 22{,}5}$ **кОм**. Тоді $\boldsymbol{R = 30}$ **кОм**, $\boldsymbol{R_{\text{A}} = 10}$ **кОм**.

За бажання можна пошукати й інші варіанти розв’язків, але успіх такого пошуку здається дуже сумнівним.

3. ***«Збиваємо дрони»!***

Оптична система пункту спостереження ППО складається із збиральної лінзи (об'єктив) та розсіювальної (окуляр). Найменша відстань між лінзами, за якої ми можемо отримати чітке зображення предмету, визначається конструкцією системи і дорівнює 950 мм. Для цієї відстані кутові розміри зображень предметів у 20 разів більші за їх видимі кутові розміри, якщо проводити спостереження неозброєним оком. Дрон був помічений в оптичну систему тоді, коли його кутова висота над горизонтом була рівною 20°. Відомо, що дрон рухається на сталій висоті 100 м та має сталі швидкість 400 км/год та напрямок руху. Траєкторія польоту має спільну точку з перпендикуляром, проведеним до поверхні землі через пункт ППО. Система ППО приводиться в бойовий стан за час 1,92 с від моменту виявлення ворожої цілі. Після цього з інтервалом часу 0,35 с можливо випускати снаряди по цілі з початковою швидкістю 800 м/с.
А) Розрахуйте, з якої **найбільшої кількості пострілів** пункт ППО збив дрон, якщо його знешкодження відбулось тоді, коли БПЛА перебував на висоті 65° над горизонтом. Розміри дрону та снарядів достатньо малі; розмірами пункту ППО – нехтуйте.
Б) Знайдіть, **як змінилась** при спостереженні за дроном **відстань** між лінзами труби від моменту виявлення БПЛА до його знешкодження. Уважайте лінзи тонкими, а систему – ідеальною центрованою.

Розв'язання

А) Перш за все з'ясуємо чи був збитий дрон при підльоті до пункту ППО, чи вже після прольоту. Для цього знайдемо відстань від «піддронових» точок К та М до пункту ППО вздовж горизонталі для висот 20° та 65° (див. рис. 1.).

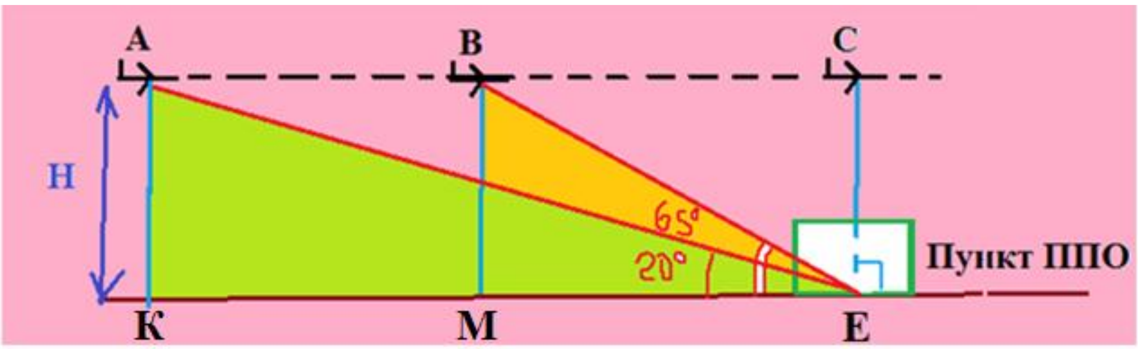


Рис. 1.

Маємо

$$KE = H\text{tg}70^o \approx 274{,}4 \text{ м}; \; ME = H\text{tg}25^o \approx 46{,}6 \text{ м}. \qquad (*)$$

В положенні В відстань ВЕ від дрона до пункту ППО $BE = H/\sin 65^o \approx \approx 110{,}3$ м. Цю дистанцію снаряд здолає за час $110{,}3/800 \approx 0{,}14$ с, що разом з часом приведення системи ППО в бойову готовність складе $0{,}14 + 1{,}92 = 2{,}06$ с (при обчисленнях ми врахували, що рух снаряду на вказаній дистанції можна вважати рівномірним, так як за час 0,14 с сила тяжіння змістить його вздовж вертикалі на величину не більшу за 10 см, що нехтовно мало при типових розмірах БПЛА).
За цей час дрон здолає відстань $111{,}1 \times 2{,}06 \approx 228{,}7$ м, а «піддронова» точка траєкторії буде перебувати на відстані $274{,}4 - 228{,}7 = 45{,}7$ від пункту ППО, що менше за відстань МЕ. Це означає, що дрон *не був уражений* при його підльоті, а вже після проходження

зеніту. Тобто, дрон був збитий тоді, коли «піддронова» точка його траєкторії пройшла праворуч від точки Е дистанцію рівну МЕ ≈ 46,6 м. Отже, БПЛА пролетить дистанцію 45,7 + 46,6 = 92,3 м перш ніж буде збитий ППО після приведення останнього в бойову готовність. На це безпілотнику знадобиться час 92,3/111,1 ≈ 0,83 с.
З огляду на нормативний час між пострілами (0,35 с) можна стверджувати, що бійці пункту ППО зроблять *не більш як 2 постріли* до знешкодження дрону.
Б) Найменша робоча відстань між лінзами досягається тоді, коли оптична

система знаходиться в телескопічному стані, тобто коли система налаштована на спостереження нескінченно далеких (насправді, дуже далеких) об'єктів. Дійсно, в цьому випадку зображення об'єктів отримуються в фокальній площині, тобто на найменшій відстані від об'єктива, а фокусна відстань окуляра є фіксованою, що забезпечує найменшу загальну відстань від об'єктива до окуляра, якщо сумістити фокуси об'єктива та окуляра. Зрозуміло, що суміщати потрібно задні (по ходу променів) фокуси (окуляр – розсіювальна лінза). Система при цьому буде працювати як перетворювач паралельного пучка променів у вужчий – теж паралельний – пучок променів (див. рис. 2).

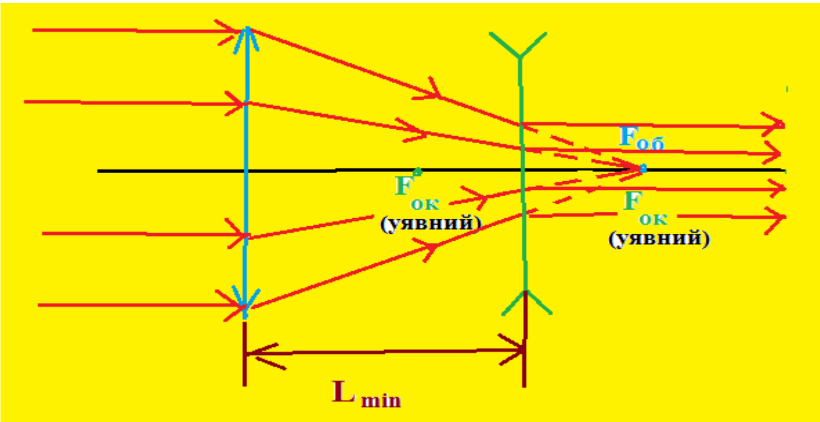


Рис. 2.
Маємо

$$\frac{F_{об}}{|F_{ок}|} = \Gamma, \qquad (1)$$

$$F_{об} - |F_{ок}| = L_{min}. \qquad (2)$$

З умови, (1) та (2) знаходимо $F_{об}$ = 100 см = 1,0 м; $F_{ок}$ = (–5) см = (–0,05) м. Звідси знаходимо оптичні сили лінз: +1 дптр (об'єктив) та (–20) дптр (окуляр).

Знайдемо відстані від дрону до зорової труби пункту ППО для висот 20°, 65° та 90° (зеніт) – див. рис. 1.

$$AE = H/\sin 20^\circ \approx 292{,}4 \text{ м}; \; BE = H/\sin 65^\circ \approx 110{,}3 \text{ м}; \; CE = 100 \text{ м}. \qquad (*)$$

Знаючі оптичну силу об'єктива та (*), неважко знайти відстані від об'єктива до зображень дрону, які створив об'єктив, використовуючи формулу тонкої лінзи. Відповідно до положень дрона в А, В та С, маємо:
f_1 ≈ 1003 мм; f_2 ≈ 1009 мм f_3 ≈ 1010 мм. Тому відстані від об'єктива до окуляра для вказаних положень дрона будуть рівними^
$l_1 = f_1 + F_{ок}$ ≈ 1003 – 50 = 953 мм; $l_2 = f_2 + F_{ок}$ ≈ 1009 – 50 = 959 мм;

$l_3 = f_3 + F_{ок} \approx 1010 - 50 = 960$ мм.

Разом з висновком, який ми отримали в п. 1) можна стверджувати, що відстань між об'єктивом та окуляром буде змінюватись в межах від 953 до 960 мм до того, як дрон пролетить зеніт пункту ППО, а потім від 960 до 959 мм до його знешкодження.

Віпповідь: а) не більше двох пострілів; **Б**) буде спочатку зростати від 953 до 960 мм, а потім зменшуватись від 960 до 959 мм.

4. «Ші-болід»

Номер двигуна	Максимальна корисна потужність двигуна, кВт	Час розгону до необхідної швидкості, с
1	30	18,5
2	120	6,5
3	210	6
4	300	6

Конструкторське бюро займалося розробкою та підбором такого двигуна для боліду, який би дозволяв на прямій горизонтальній трасі, з однаковими повними масами авто (1200 кг), з однаковими для всіх моделей властивостями дороги та гуми, починаючи зі стану спокою, якомога швидше досягти зазначеної в правилах змагань швидкості V_{max}. Для змагань використовувалося закрите спеціально обладнане приміщення, де будь-яким впливом повітря на рух болідів під час змагань і силою тертя кочення можна було знехтувати, а значення прискорення вільного падіння можна уважати рівним 10,0 м/с^2.

Під час змагань болідом керує ШІ, який підбирає такий режим розгону, який не тільки є оптимальним за часом, але й не допускає проковзування. Уважайте значення коефіцієнту тертя ковзання між шинами та покриттям траси постійним, а всі колеса ведучими.

Згідно інсайдерської інформації, конструктори, використовуючи в болідах двигуни різних потужностей, отримали наступні значення часу розгону до потрібної швидкості в залежності від максимальної корисної потужності встановленого в болід двигуна (дивись таблицю).

А) **Поясніть, чому** для двигунів № 3 та № 4 час розгону однаковий.

Б) Знайдіть, **до якої швидкості V_{max}** мали розганятися боліди?

В) У другому турі змагання гонки проходили на тих самих болідах на такому ж покритті і в тому ж приміщенні за цілком попередніх умов руху, але боліди мали стартувати в гору по похилій трасі з кутом нахилу покриття до горизонту в 11^0. **За який час** цей болід з корисною потужністю двигуна 180 кВт досягне тієї ж самої швидкості V_{max}?

Розв'язання.

В оптимальному режимі набір швидкості відбувається наступним чином: с початку болід, рухаючись на межі проковзування, набирає потужність від нуля до максимального значення. На цьому етапі, сила тертя, яка штовхає болід уперед, максимальна і постійна. В наслідок цього рух боліда на першому етапі є рівноприскореним. Після моменту набуття максимальної потужності болід продовжує набір швидкості, але режим руху принципово змінюється: потужність підтримується постійною, але рух вже не буде на межі проковзування і перестає бути рівноприскореним.

В залежності від того, яка максимальна потужність боліду і швидкість, яку за правилами змагань має він досягнути, болід може вийти на задану швидкість або виключно рухаючись в першому режимі, або рухаючись з виходом і на другий режим руху. Тому зрозуміло, що при заданій фіксованій контрольній швидкості V_{max} якщо потужність P буде вище деякого критичного її значення $P_{кр}$, автомобіль поза залежності від значення цієї потужності буде досягати цієї швидкості $\mathbf{V_{max}}$ за однаковий час, бо прискорення обумовлено однаковою для усіх болідів силою тертя ковзання:

$$\tau_0 = \frac{\vartheta_{max}}{\mathrm{a}} = \frac{\vartheta_{max}}{\mu g}, \text{якщо } \mathrm{P} > \mathrm{Ркр} = F\text{терт} * \vartheta_{max} = \mu m g \vartheta_{max}$$

Але якщо максимальна потужність вже набрана, а досягнута швидкість V_1 ще менша за V_{max} тоді загальний час руху до «мети» буде:

$$\tau_0 = \tau_1 + \tau_2 = \frac{\vartheta_1}{\mu g} + \frac{m(\vartheta_m^2 - \vartheta_1\ )}{2\mathrm{P}} = \frac{m\vartheta_m^2}{2p}\left(1 + \left(\frac{\mathrm{P}}{\mu m g \vartheta_m}\right)^2\right), \text{якщо } \mathrm{P} < \mu m g \vartheta_{max},$$ де

Место для уравнения.

$$\vartheta_1 \ = \frac{\mathrm{Ркр}}{\mu m g}$$

Якщо позначити кінцеву (максимальну) кінетичну енергію боліда за W, час руху на першій ділянці за $\tau_{\text{кр}} = \frac{\vartheta_{max}}{\mu g}$,то цю формулу можна записати як:

$$\tau_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{W}\frac{\tau_{\text{кр}}^2}{2} + 2\frac{W}{p}\right) = \frac{p}{W}\frac{\tau_{cr}^2}{4} + \frac{W}{p}.$$

Застосуємо цей зв'язок для перших двох двигунів з наведеної таблиці:

$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{p_1}{W}\frac{\tau_{cr}^2}{4} + \frac{W}{p_1} \\ \tau_2 = \frac{p_2}{W}\frac{\tau_{cr}^2}{4} + \frac{W}{p_2} \end{cases} | => \ W = \frac{\tau_1 p_2 - \tau_2 p_1}{\frac{p_1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1}} = 540\text{кДж}$$, звідки V_{max}=30 м/с, $\tau_{\text{кр}}$=6 с, μ=0,5.

Якщо змагання відбуваються на похилій поверхні, то потужність двигуна, необхідна для досягнення V_{max}=30 м/с при розгоні у режимі 1 (рівноприскорений рух), дорівнює:

$p_{\text{кр}} = \mu m g \cos\alpha\, \vartheta_{max} = 176{,}7$ кДж і вона є меншою за максимальну потужність двигуна 180 кДж, про який йдеться у задачі. Тому болід буде розганятися тільки в режимі 1 з прискоренням $a = g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)$.

$$\tau_1 = \frac{\vartheta_m}{a} = \frac{\vartheta_m}{g\ \ (\mu\cos\alpha - \sin\alpha)} = 10 \text{ с}$$

5. «Кава з молоком»

Декан хімічного факультету - пунктуальна людина, що цінує точність і холодну каву з молоком.

– Чашку кави через 5 хвилин,– сказав декан, збираючись на ділову зустріч. Через хвилину його робот-помічник вже перелив 200 г кави з кавомашини у високу тонкостінну мензурку, щоб кава там скоріше охолола. Але ще через хвилину кава остигла з 95°C лише до 80°C, і робот у паніці дістав з холодильника іншу таку ж мензурку з охолодженим молоком. Він знав, що до кави треба додати 100 г молока. Але не знав як вчинити, щоб досягти найнижчої температури напою за ті 3 хвилини, що залишилися? Долити відразу? Трохи пізніше? Наприкінці через 3 хвилини?

Допоможіть штучному інтелекту знайти правильне рішення цієї задачі:

На столі стоять дві вузькі тонкостінні (для кращого теплообміну) мензурки, одна з кавою вже за температури 80°C, інша з холодним молоком.

А) Спробуйте отримати формулу залежності температури кави від часу τ. Для цього розбийте τ на n малих проміжків часу $\Delta\tau$ і запишіть рівняння теплового балансу для декількох перших з них. Виразите останню температуру через початкову і «впіймайте» закономірність.

Б) Через який час після початку останніх трьох хвилин слід додати молоко в каву, щоб наприкінці температура напою «кава з молоком» виявилась найменшою?

В) Якою буде ця температура?

Температура в кімнаті підтримується на рівні 20°C, а у холодильнику на рівні 5°C.

Фізичні характеристики кави й молока вважати такими ж, як і у води.

Урахуйте, що потужність теплопередачі пропорційна площі поверхні і різниці температур з навколишнім середовищем. Тепловими втратами через циліндричні основи у мензурках знехтуйте.

Якщо не вдається отримати точний розв'язок, зробіть наближений, оціночний.

Розв'язання без інтегрування.

А. Запишемо рівняння теплового балансу. За невеликий проміжок час $\Delta\tau$ температура знижується на невелику величину $\Delta T = T_0 - T_1$.

$$cm(T_0 - T_1) = kS(T_0 - T_н)\Delta\tau,$$

де $T_н$ – температура навколишнього середовища. Звідси виразимо нову температуру T_1:

$$T_1 = T_0 - (T_0 - T_н)\alpha\Delta\tau = T_0\beta + T_н\alpha\Delta\tau, \qquad (1)$$

де введено позначення $\alpha = \frac{kS}{cm}$, $\beta = 1 - \alpha\Delta\tau$. Через наступний такий самий проміжок часу $\Delta\tau$

$$T_2 = T_1\beta + T_н\alpha\Delta\tau. \qquad (2)$$

Далі

$$T_3 = T_2\beta + T_н\alpha\Delta\tau, \qquad (3)$$

Підставимо (1) в (2) щоб спробувати знайти закономірність і виразити кінцеву температуру через початкову:

$$T_2 = T_0\beta^2 + T_{\text{н}}\alpha\Delta\tau(1+\beta).$$

Підставимо отриманий вираз в (3):

$$T_3 = T_0\beta^3 + T_{\text{н}}\alpha\Delta\tau(1+\beta+\beta^2),$$

$$T_4 = T_0\beta^4 + T_{\text{н}}\alpha\Delta\tau(1+\beta+\beta^2+\beta^3)\ldots$$

І так далі. У дужках при $T_{\text{н}}\alpha\Delta\tau$ виникає геометрична прогресія. Тоді, скориставшись формулою суми геометричної прогресії, для T_n маємо

$$\boldsymbol{T_n} = T_0\beta^n + T_{\text{н}}\alpha\Delta\tau\frac{1-\beta^n}{1-\beta} = \boldsymbol{T_{\text{н}}} + (\boldsymbol{T_0} - \boldsymbol{T_{\text{н}}})\boldsymbol{\beta^n}.$$

Ціле число n – це кількість малих проміжків часу, на який ми поділили довільний час τ остигання речовини: $n = \frac{\tau}{\Delta\tau}$, де β знайдемо з умови зниження температури кави на 15℃ за першу хвилину $\tau_I = 1$хв з $T_0 = 95$℃ до $T_I = 80$℃:

$$T_I = T_{\text{н}} + (T_0 - T_{\text{н}})\boldsymbol{\beta}^{\frac{\tau_I}{\Delta\tau}},$$

звідки

$$\beta^{\frac{\tau_I}{\Delta\tau}} = \frac{T_I - T_{\text{н}}}{T_0 - T_{\text{н}}} = \frac{4}{5}.$$

Отже, температура кави у будь-який момент часу визначається формулою

$$T = T_{\text{н}} + (T_0 - T_{\text{н}})\beta^{\frac{\tau}{\Delta\tau}} = T_{\text{н}} + (T_0 - T_{\text{н}})\left(\frac{T_I - T_{\text{н}}}{T_0 - T_{\text{н}}}\right)^{\frac{\tau}{\tau_I}} \tag{4}$$

$$T = \left(20 + 75\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{\tau}{\text{хв}}}\right)℃.$$

Формула (4) в загальному вигляді описує остигання будь-якої речовини. Але й нагрівання також, зокрема, холодного молока у нашому випадку (тоді множники $T_0 - T_{\text{н}}$ і $T_I - T_{\text{н}}$ в (4) просто матимуть від’ємні значення. Якщо мензурки з кавою і молоком мають однакові радіуси, то коефіцієнти $\alpha = \frac{kS}{cm} = \frac{k2\pi rh}{c\rho\pi r^2 h} = \frac{2k}{c\rho r}$, а отже й $\beta = 1 - \alpha\Delta\tau$ для них також будуть однаковими. Тоді температура молока згідно (4) у будь-який момент часу описуватиметься формулою

$$T_{\text{м}} = \left(20 - 15\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{\tau}{\text{хв}}}\right)℃. \tag{5}$$

Відлік часу τ у (5) починається з моменту, коли молоко дістали з холодильнику, тобто за 3 хвилини до повної готовності «кави з молоком». У момент, коли молоко дістали з холодильнику, температура кави була 80°С. Приймемо її за початкову температуру в (4) й отримуємо

$$T_{\text{к}} = \left(20 + 60\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{\tau}{\text{хв}}}\right)°\text{C}. \tag{6}$$

Згідно (6) у момент $\tau = 0$ с, температура кави 80°С, а за хвилину до цього ($\tau = -1$ с) температура кави 95°С. Через 3 хвилини після $\tau = 0$ с, якщо каву з молоком не змішуватимуть до самого кінця, їхні температури будуть 50,72°С і 12,32°С відповідно.

Припустимо, що ми їх змішали у деякий довільний момент часу $\tau \leq 3$хв. Температура T, яка встановиться, визначається з рівняння теплового балансу:

$$T = \frac{m_{\text{к}}T_{\text{к}} + m_{\text{м}}T_{\text{м}}}{m_{\text{к}} + m_{\text{м}}} = T_{\text{н}} + \frac{60m_{\text{к}} - 15m_{\text{м}}}{m_{\text{к}} + m_{\text{м}}}\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{\tau}{\text{хв}}}°\text{C}.$$

Оскільки утворена кава з молоком остигатиме ще час ($3\text{хв} - \tau$), а коефіцієнт $\alpha = \frac{kS}{cm}$ суміші за рахунок однакового збільшення і маси, і площі тепловіддачі залишається незмінним, маємо згідно формули (4) остаточну температуру T_{fin} суміші

$$T_{\text{fin}} = T_{\text{н}} + (T - T_{\text{н}})\left(\frac{4}{5}\right)^{3-\frac{\tau}{\text{хв}}} = T_{\text{н}} + \frac{60m_{\text{к}} - 15m_{\text{м}}}{m_{\text{к}} + m_{\text{м}}}\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{\tau}{\text{хв}}}\left(\frac{4}{5}\right)^{3-\frac{\tau}{\text{хв}}}°\text{C} = \left(20 + 35\left(\frac{4}{5}\right)^{3}\right)°\text{C}$$
$$= 37{,}92°\text{C} \approx 38°\text{C}.$$

Як бачимо, відповідь не залежить від моменту часу, коли змішують каву з молоком, якщо ті були налиті в однакові мензурки і між ними та навколишнім середовищем весь час відбувався теплообмін. Ця відповідь зберігається й для інших початкових температур кави й молока. Виходячи з умов і простоти відповіді, ймовірно, до неї можна прийти з більш простих і наочних міркувань.

Якщо діаметр мензурки з молоком буде вдвічі більшим, ніж з кавою, молоко менше нагріватиметься поки стоятиме у своїй мензурці, й тому для меншої кінцевої температури суміші, треба додати його до кави в останню мить. Якщо ж діаметр мензурки з молоком буде вдвічі меншим вигідніше долити його відразу.

Задачі запропонували: 1. Микуленко О.І. 2. Гельфгат І.М., 3. Шевчук О.Г.
4. Пашко М.І., 5. Орлянський О.Ю.