

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Український фізико-математичний ліцей Київського національного
університету імені Тараса Шевченка

XXIV Всеукраїнська учнівська Інтернет-олімпіада з фізики
2024/2025 навчального року

II (фінальний) етап Теоретичний тур
11 клас
РОЗВ'ЯЗКИ

1. «Магнітна синусоїда»

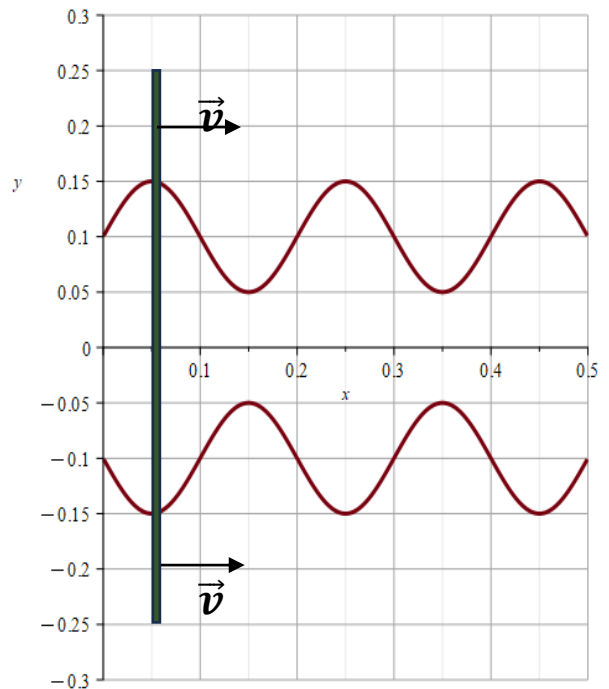
Вертикальна складова магнітного поля Землі у м. Дніпро дорівнює 44 мкТл.

А) Яка різниця потенціалів наводиться на кінцях металевого стержня довжиною 50 см, який ковзає зі швидкістю 50 см/с вздовж горизонтальної поверхні гладенького дерев'яного столу перпендикулярно до своєї довжини?

Б) Уявіть тепер, що стержень ще й обертається з кутовою швидкістю 2 с^{-1} , а зі швидкістю $u = 50 \text{ см/с}$ рухається його центр мас. Якого максимального значення набуватиме різниця потенціалів на кінцях стержня?

В) На цей стіл поклали два мідні дроти у вигляді синусоїд, розміри і розташування яких вказані на рисунку. Одну з пар кінців двох дротів-синусоїд з'єднали мікроамперметром з внутрішнім опором 10 Ом. Визначте залежність струму від часу через мікроамперметр, коли вздовж синусоїд з тією ж швидкістю 50 см/с поступально рухають той самий стержень як показано на рисунку. За початковий момент часу взяти момент проходження стержнем початку координат. Опором стержня і дротів знехтувати.

Г) Яка середня теплова потужність виділяється в мікроамперметрі?



Розв'язання.

А. Знайти різницю потенціалів на кінцях металевого стержня можна або за допомогою зміни магнітного потоку, або через нульову рівнодійну для сил зі сторони електричного і магнітного полів, що діють на носії зарядів всередині стержня:

$$U = vBl = 11 \text{ мкВ.}$$

Б. Під час руху з обертанням швидкість \vec{v} довільної точки стержню на відстані r від його середини, де знаходиться центр мас, дорівнює векторній сумі швидкості центру мас \vec{u} і відносної швидкості $v_{\text{від}} = \omega r$. За рахунок цього сила Лоренца $\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$

розділяється на дві складові. Причому друга, пов'язана з обертанням навколо центру мас, приводить до нульової різниці потенціалів між кінцями стержня. А першу слід спроектувати на довжину стержня і прирівняти до qE , щоб знайти напруженість електричного поля, а з нею і різницю потенціалів між кінцями. Тоді для деякого моменту часу, починаючи з перпендикулярного до швидкості центру положенню стержня $U = uBl\cos(\omega t) = 11\cos(2t)\text{мкВ}$. Максимальне значення 11 мкВ можна було б отримати просто, розглянувши момент часу, коли стержень перпендикулярний до швидкості центру мас.

В, Г. Рівняння синусоїди (в СІ): $y = 0,1 + 0,05\sin(10\pi x)$. Формула $U = vBl$ зберігатиме своє значення, де ефективна довжина дорівнює подвоєній відстані до синусоїди від осі абсцис: $l = 2y = 0,2 + 0,1\sin(10\pi x)$, де $x = 0,5t$. Отже

$$I = \frac{U}{R} = (2 + \sin(5\pi t)) \cdot 220 \text{ нА.}$$

4.3. Теплова потужність буде змінюватись за законом

$$P = I^2 R = (2 + \sin(5\pi t))^2 \cdot 2,2^2 \cdot 10^{-13} \text{ Вт}$$

$$= \left(4 + 4\sin(5\pi t) + \frac{1}{2}(1 - \cos(10\pi t)) \right) \cdot 2,2^2 \cdot 10^{-13} \text{ Вт.}$$

Середнє значення потужності за повний період або протягом тривалого інтервалу часу 2,178 пВт.

2. «До зустріч на орбіті !»

Космічна станція рухається навколо Землі коловою орбітою радіусом 6700 км. Транспортний космічний корабель (ТКК) масою 6 т, що мав пристикуватися до станції, через неточність у розрахунках вийшов на *ту саму* орбіту, але опинився «попереду» від космічної станції на якихось 12,6 км. ТКК має пристикуватися до станції протягом найближчих годин, щоб передати критично важливе обладнання. ТКК має невеликий запас палива, якого вистачить на маленький час роботи двигуна. Швидкість витікання розпечених газів із сопла двигуна дорівнює 3 км/с. Визначте:

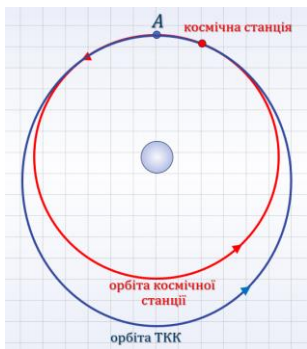
А) **мінімальну масу палива**, за якої ТКК може зблизитися з космічною станцією та дуже м'яко стикуватися з нею.

Б) **Скільки вмикань** двигуна для цього знадобиться? Маса Землі дорівнює $M = 6 \cdot 10^{24}$ кг, гравітаційна стала $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}$. Зміну маси ТКК через витрату палива не враховуйте.

Розв'язання

Визначимо найкращий порядок дій. На перший погляд може здатися, що ТКК має почати маневр з «гальмування». Але тоді він перейде на еліптичну орбіту, у якої велика піввісь a буде меншою від радіуса R початкової орбіти. Згідно з третім законом Кеплера період обертання такою еліптичною орбітою буде меншим від періоду T_0 обертання космічної станції. Отже, коли ТКК повернеться в точку А, де він отримав короткий гальмівний імпульс, космічна станція ще не встигне зробити повний оберт і тому ще більше «відставатиме» від ТКК. Таким чином, як не дивно з «земної» точки зору, ТКК має отримати поштовх, через який він *збільшить* швидкість і перейде на «більшу» (зовнішню, див. схематичний рисунок) еліптичну орбіту.

Період обертання ТКК має стати $T = T_0 + \Delta t = T_0 + s/v_0$, де $s = 12,6$ км, а $v_0 = \sqrt{GM/R} = 7,73$ км/с.



Як впливає з третього закону Кеплера:

$$a = R \left(\frac{T}{T_0} \right)^{2/3} = R \left(1 + \frac{\Delta t}{T_0} \right)^{2/3} = R \left(1 + \frac{2s}{3v_0 T_0} \right) = R \left(1 + \frac{s}{3\pi R} \right).$$

Ми скористалися тим, що $v_0 T_0 = 2\pi R$, а $s \ll R$.

Врахуємо тепер, що механічну енергію W корабля можна виразити через велику піввісь його траєкторії: $W = -G \frac{Mm}{2a}$. Оскільки $W_0 = -G \frac{Mm}{2R}$, після переходу на еліптичну орбіту маємо $W = W_0 \frac{R}{a} = W_0 + \frac{mv_0^2}{2} \cdot \frac{s}{3\pi R}$. Отже, треба збільшити кінетичну енергію ТКК на $\Delta W = \frac{mv_0^2}{2} \cdot \frac{s}{3\pi R}$. За умови невеликого збільшення швидкості $\Delta W = mv_0 \Delta v$, тому потрібне збільшення імпульсу $\Delta p = m\Delta v = mv_0 \cdot \frac{s}{6\pi R}$.

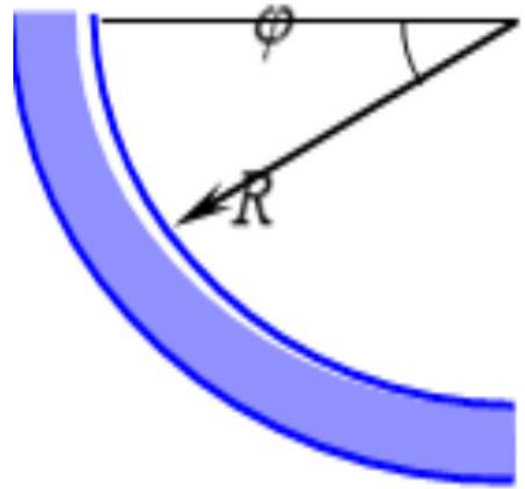
Відповідно до закону збереження імпульсу маса витраченого для переходу на еліптичну орбіту палива $m_{1 \text{ пал}} = \frac{\Delta p}{u} = m \frac{v_0}{u} \cdot \frac{s}{6\pi R}$. Тут $u = 3$ км/с. Але слід ще врахувати: для м'якої стиковки додаткову швидкість ТКК треба «загасити», для чого потрібна знов така сама витрата палива.

$$\text{Отже, остаточно: } m_{\text{пал}} = 2m_{1 \text{ пал}} = m \frac{v_0}{u} \cdot \frac{s}{3\pi R} = 3,1 \text{ кг.}$$

Зауважимо, що є формальна можливість зробити період $T = T_0 + s/(nv_0)$, де n — будь-яке натуральне число. Це дозволить зменшити в n разів витрату палива, але збільшить кількість обертів до зустрічі та стиковки. З умови задачі видно, що така «економія» неприпустима, час є дорожчим.

3. «Труба трубі»

При виготовленні ділянки труби, що має форму чверті кола радіуса R , верхній кінець якої відкритий у атмосферу, використали занадто неміцний матеріал: коли в трубу залили воду до рівня $\varphi = \varphi_0$ (див. рис.) труба не витримала. Проектувальники вирішили виправити становище і виготовили трубу зі стінками, товщина яких наростала донизу за законом $d = d_0 + \alpha \sin^2 \varphi$, де d_0 – товщина стінок у трубі-прототипі, а α – константа. Матеріал труби в обох випадках однаковий.



А) За яких значень параметра α це рішення допоможе, якщо метою є заповнити всю ділянку труби?

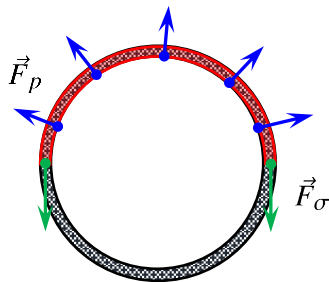
Б) Уявімо собі, що тепер трубу заповнюють газом під деяким тиском p , при цьому верхній кінець трубки закривають. Яким буде критичне значення цього тиску для труби прототипу і для «зміцненої труби»?

В) Як, на вашу думку, треба було спроектувати зміну товщини труби найоптимальнішим чином (у випадку заповнення водою)? Знайдіть, як вона повинна змінюватися вздовж труби.

Уважайте, що товщина стінок труби набагато менша від її діаметру, який в свою чергу набагато менший від R .

Розв'язання.

Труба розривається від напруження, що діє у перерізі в дотичному напрямку (див. рис.). Розглянемо сили, що діють на невелику ділянку «половинки» труби довжиною Δl , відмічену на рисунку червоним. Це сили \vec{F}_p тиску рідини, результуюча яких дорівнює $F_p = p \cdot 2r\Delta l$ (в цьому можна впевнитися, помітивши, що сума сил тиску, що діють на воду в верхній половинці труби на рисунку, дорівнює майже нулю, а отже вертикальна сила, що діє на діаметральний переріз, компенсує шукану силу зі сторони поверхні труби), а також сили \vec{F}_σ пружності з боку іншої половинки труби, які дорівнюють $F_\sigma = \sigma \cdot 2\Delta l d$ (тут σ – напруження в матеріалі труби, тобто сила, що діє на одиницю площі перерізу труби, в даному випадку в дотичному напрямку).



Прирівнюючи ці дві сили, маємо, що напруження пропорційне до тиску у трубі і обернено пропорційне товщині стінок.

А) В першому випадку критичним значенням цього відношення (яке досягається у нижній точці труби) було $\rho g R(1 - \sin \varphi_0)/d_0$. Коли ж товщину стінок зробили змінною, ця величина немонотонно змінюється з висотою. Вважаючи, що залили всю чверть кола, і переходячи від змінної кут до вертикальної координати y , яку відраховуємо від верхньої точки труби униз, отримаємо:

$$\frac{\rho g R \sin \varphi}{d_0 + \alpha \sin^2 \varphi} = \frac{\rho g y}{d_0 + \alpha y^2/R^2} = \frac{\rho g}{d_0/y + \alpha y/R^2}.$$

Цей вираз досягає максимального значення при $y_m = R \sqrt{d_0/\alpha}$. Якщо воно менше за R , то критерієм, коли труба витримає тиск, треба записати у цій точці, а якщо більше R , то найбільш вразливою точкою є нижня точка труби. Порівнюючи в усіх випадках з першим випадком отримаємо, що якщо $\varphi_0 < 30^\circ$, то труба витримає тиск при $\alpha > d_0 \sin \varphi_0 / (1 - \sin \varphi_0)$, а якщо $\varphi_0 > 30^\circ$, то при $\alpha > d_0 / 4(1 - \sin \varphi_0)^2$.

Б) Тиск газу практично однаковий по всій довжині трубки, тому «зміцнення» труби не допоможе – в обох випадках найтонша частина стінки має товщину d_0 . Значення тиску буде, як і у першому випадку $\rho g R(1 - \sin \varphi_0)$. Цікаво, що якщо для зміцненої труби можна передбачити найнебезпечніше місце – верхній, найтонший переріз – то для труби постійної товщини формально немає виділеного місця, в якому вона може не витримати (на практиці це може бути місце з будь-яким дефектом, або там, де товщина буде трішки меншою).

в) Найоптимальнішим буде змінювати товщину так, щоб відношення тиску до товщини було постійним вздовж труби, тобто

$$\frac{\rho g R \sin \varphi}{d(\varphi)} = \text{const} = \frac{\rho g R(1 - \sin \varphi_0)}{d_0},$$

звідки маємо для шуканої залежності

$$d(\varphi) = d_0 \frac{\sin \varphi}{1 - \sin \varphi_0}.$$

У цьому випадку ймовірність розриву кожної ділянки труби формально однакова, отже ні на якій ділянці не було використано зайвої кількості матеріалу.

4. "Ігри з пласкою Планетою"

У цьому завданні ми розглянемо планету у формі диску і її особливості. Впродовж всієї задачі можна уважати товщину планети набагато меншою за її радіус. Деякі числові дані: гравітаційна константа $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Н м}^2/\text{кг}^2$, товщина планети $h = 100 \text{ км}$, радіус планети $R = 10\,000 \text{ км}$, густина матеріалу планети $\rho = 5000 \text{ кг/м}^3$.

А) Стабільність. На даний момент не було відкрито жодної такої планети. Оцініть, як відносяться власні гравітаційні потенційні енергії дискової планети і планети у формі кулі такої ж маси і густини.

Б) Міцність. Такі планети не можуть сформуватись в результаті натурального формування планет. Та чи **можливо** зробити їх штучно? Основним обмеженням є міцність матеріалу такої штучної планети. **Оцініть механічне напругу** в її перерізі і порівняйте з границею міцності сталі $\sigma_M \approx 1$ ГПа.

В) Швидка? доставка. Уявімо, що така планета все ж існує, і крізь її центр вздовж вісі симетрії пробурили вузький гладкий канал, що з'єднує дві її протилежні пласкі поверхні. Біля однієї з поверхонь в цей канал відпустили без початкової швидкості вантаж. Знайдіть, **через який час T** він досягне іншої поверхні.

Розв'язання.

А) Обидві планети мають об'єм $V = \frac{4}{3}\pi R_0^3 = \pi R^2 h$

$$R_0 \sim (R^2 h)^{1/3}$$

$$|U_{\text{шар}}| \sim \frac{GM^2}{R_0} \sim \frac{GM^2}{R^{2/3} \cdot h^{1/3}} \sim \frac{GM^2}{R} \cdot \left(\frac{R}{h}\right)^{1/3} \sim |U_{\text{диск}}| \cdot \left(\frac{R}{h}\right)^{1/3}$$

Можна зробити висновок, що куляста конфігурація може бути у декілька разів більш енергетично вигідною. Це одна з причин, чому планети неправильної форми не утворюються в процесі нормального формування. Вид залежності потенціальної енергії U від параметрів G , M , l можна знайти за допомогою аналізу розмірностей. Проте у випадку з дисковою планетою є дві величини, що можуть "зійти" за характерний розмір: R і h (або їх комбінації). Прямий розв'язок цієї задачі є доволі непростим, тому журі уважно розглядало і оцінювало будь-яку спробу прийти до відповіді. У першому наближенні зміною потенціала точок планети біля площини симетрії в порівнянні з точками на цій площині можна знехтувати.

Б) Оцінімо величину напруженості матеріалу планети в прямокутному перерізі $h \times 2R$. Два півкруги притягуються один до одного із силою $F_G \sim \frac{GM^2}{R^2}$. Їм протидіє сила напруженості $F_T \sim \sigma S \sim \sigma hR$

$$\sigma \sim \frac{GM^2}{hR^3} \sim G\rho^2 R h \approx 10^9 \text{ Па}$$

Напруга в самому центрі буде ще більшою. Сталь її, вірогідно, не витримає.

В) Використаємо закон Гауса для гравітаційного поля

$$\Phi = -4\pi G m_{\text{всередині}}$$

В якості поверхні візьмемо циліндр, одна з основ якого лежить в площині симетрії, а інша на висоті x від першої. З міркувань симетрії, потік поля через нижню основу і бічну поверхню має бути нульовий. Звідси (для $|x| \leq h$)

$$g_x(x) = -4\pi G\rho x$$

$$F_x = -4\pi G\rho t x$$

Це квазіпружня сила, відповідно, тіло в тунелі буде рухатись за гармонійним законом.

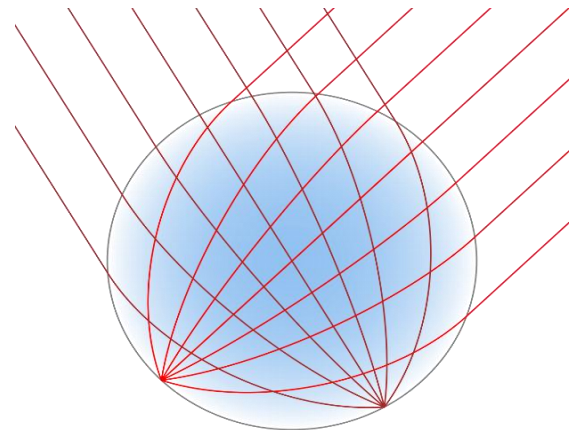
$$\omega^2 = 4\pi G\rho$$

$$T = \frac{T_0}{2} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{\pi}{4G\rho}} \approx 1500 \text{ с} \approx 26 \text{ хв}$$

Середня швидкість такого руху складає близько 230 км/год.

5. «Лінза Люнеберга»

Лінза Люнеберга все частіше використовується на дешевих дронах-приманках для відволікання вогню протиповітряної оборони. Лінза Люнеберга - це куля з діелектрику з показником заломлення, який збільшується від краю до центру, завдяки чому та фокусує паралельний пучок променів, що на неї падає, у протилежній точці на своїй сферичній поверхні. На рисунку зображені два різні паралельні пучки, які фокусуються у різних точках. Якщо поверхню у місцях фокусування вкрити відбивним матеріалом, то відбиті промені пройдуть лінзою шлях назад і вийдуть з неї паралельним пучком точно у зворотному напрямку. Це створює ілюзію високої відбивної здатності, а отже й значно більшого за розмірами літального апарату.



А) Розгляньте спочатку спрощений випадок: куля зроблена з однорідного прозорого матеріалу і знаходиться всередині паралельного пучка променів. Рівновіддалені від осі симетрії промені з кутом падіння α на поверхню кулі, потрапляють разом з центральним променем в одну точку внутрішньої поверхні лінзи. **Як залежить показник заломлення n від кута α і в якому інтервалі змінюється?**

У подальших пунктах розгляньте лінзу **Люнеберга**, у якій всі промені, що падають на неї з повітря, повністю проходять в неї. Тобто показник заломлення лінзи на її поверхні радіусом R дорівнює показнику заломлення повітря. Формула залежності показника заломлення n цієї лінзи від відстані r до її центру має вигляд: $n(r) = \sqrt{A - B \cdot r^2}$. Додатково врахуйте, що при потраплянні такої лінзи у паралельний пучок променів електромагнітне випромінювання пронизує весь її об'єм.

Б) Який час промінь, що падає на поверхню такої лінзи під кутом α , рухатиметься в ній?

В) Знайдіть коефіцієнти A і B в формулі $n(r)$.

Розв'язання

А)

$$\begin{cases} \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n, \\ \alpha = 2\gamma. \end{cases}$$

$$n = 2 \cos \gamma = 2 \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Коефіцієнт заломлення n змінюється від 2 при перпендикулярному падінні до $\sqrt{2}$ при дотичному.

Б) За принципом Ферма час усіх променів, які фокусує лінза Люнеберга, має бути однаковим. Ця ж вимога впливає і з хвильової оптики: у точці максимуму різниці ходу має дорівнювати цілому числу (в нашому випадку нульовому) довжин хвиль, або різниця часу – цілому числу періодів. Тому оптичні системи, які концентрують світло, дають однаковий час руху для різних променів. На рисунку пунктиром зображений фронт паралельного пучка. Дотичний промінь проходить зі швидкістю c відстань $R + \frac{\pi}{2}R$, витрачаючи на це час $(1 + \frac{\pi}{2})\frac{R}{c}$

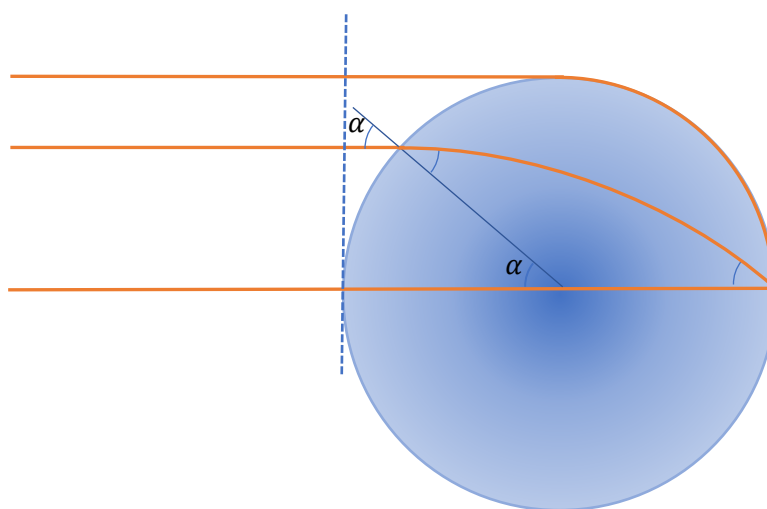
Час променя, що падає на поверхню лінзи під кутом α складається з часу руху у повітрі $(1 - \cos\alpha)\frac{R}{c}$ і часу руху у лінзі t_l . Дорівнюючи, знаходимо час руху у лінзі до точки фокусування

$$t_l = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\frac{R}{c} - (1 - \cos\alpha)\frac{R}{c} = \left(\frac{\pi}{2} + \cos\alpha\right)\frac{R}{c}.$$

Час руху до точки фокусування (відбиття) і назад буде удвічі більшим $(\pi + 2\cos\alpha) R/c$.

В) Оскільки коефіцієнт заломлення збільшується до центру лінзи, першу половину шляху промінь відхилитиметься вбік центру, пройде на мінімальній відстані від нього, коли кут між радіусом і променем дорівнюватиме 90° , після чого симетрично пройде до точки фокусу (див. Рис.).

Найбільш радикальне наближення до центру буде у центрального променя (від R до 0 - проходження крізь центр), найменше – у дотичного променя. Але якщо той наблизиться до центру на відстань меншу радіусу лінзи R , тоді в зовнішню частину лінзи випромінювання не проникатиме, що суперечить умові. Отже, в ідеалізованому випадку дотичний промінь має рухатись вздовж чверті кола. При повороті подібного променя його фронт має повертатися на такий самий кут. Отже,



час руху двох таких нескінченно близьких уявних променів зі спільним фронтом при повороті на однаковий кут має бути однаковими. Тобто час руху не залежить від радіусу кола r поблизу поверхні лінзи або $t'(R) = 0$. У загальному випадку

$$t'(r) = \left(\frac{2\pi r}{v}\right)' = \left(\frac{2\pi r}{c/n}\right)' = \frac{2\pi}{c}(r \cdot n)' = \frac{2\pi}{c}(r \cdot \sqrt{a - br^2})' = \frac{a - 2br^2}{\sqrt{a - br^2}}.$$

Підставимо $r = R$ в $t'(R) = 0$ і знайдемо

$$a - 2bR^2 = 0. \quad (1)$$

За умовою показник заломлення на границі лінзи дорівнює показнику заломлення повітря, тобто, приблизно 1. Отже маємо ще одне рівняння: $n(R) = \sqrt{a - bR^2} = 1$ або

$$a - bR^2 = 1. \quad (2)$$

З рівнянь (1) і (2) знаходимо невідомі коефіцієнти: $a = 2, b = 1/R^2$. Отже, для нашої ідеалізованої лінзи Люнеберга

$$n(r) = \sqrt{2 - \frac{r^2}{R^2}}.$$

Рівняння (1) можна було отримати інакше зі сталого виразу добутку коефіцієнту заломлення, радіусу і синусу кута для сферично-симетричного розподілу: $n(r)r \sin \alpha = \text{Const}$.

Задачі запропонували: 1, 5. Орлянський О.Ю. 2. Гельфгат І.М. 3. Майзеліс З.О. 4. Пашко М.І., Прасолов О.К.