Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Український фізико-математичний ліцей Київського національного університету імені Тараса Шевченка

XXIV Всеукраїнська учнівська Інтернет-олімпіада з фізики
2024/2025 навчального року
II (фінальний) етап Теоретичний тур
9 клас

РОЗВ'ЯЗКИ

1. «Теплова напруга»

Є два стрижні, виготовлені з різного матеріалу. Довжини стрижнів дорівнюють $\boldsymbol{l}$ і $\boldsymbol{2l}$, а їх площі перерізу однакові. Якщо підвісити на перший стрижень вантаж деякої маси, то він видовжується на вдвічі більшу величину, ніж другий від того ж вантажу. Якщо збільшити температуру першого стрижня на $\boldsymbol{\Delta t}$, його довжина збільшується на $\boldsymbol{\Delta l}$, а другий стрижень при такому ж нагріванні збільшує довжину на $\boldsymbol{3\Delta l}$. Другий стрижень розрізають навпіл і три отримані стрижні однакової довжини скріпляють жорстко з обох кінців, отримуючи зразок потрійної площі перерізу. **Знайдіть його коефіцієнт теплового розширення**. Уважайте, що при розширенні всі три стрижні не вигинаються.

Розв'язання.

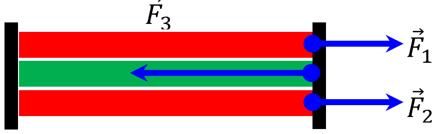
З умови про видовження отримаємо, що жорсткість першого стрижня вдвічі менша, ніж у другого, або в чотири рази менша ніж у половинки другого. Позначимо їх відповідно k і 4k. З умови про теплове розширення кожного зі стрижнів отримаємо, що коефіцієнт теплового розширення другого стрижня у півтори рази більший, ніж у першого (його довжина вдвічі більша!). Нарешті, для з'єднаної системи умова рівноваги з'єднань на кінцях має вигляд $F_3 = F_1 + F_2 = 2F_1$. Враховуючи співвідношення жорсткостей і змін рівноважних довжин стрижнів, маємо

$$k \cdot (\Delta l - \Delta l_s) = 2 \cdot 4k \cdot (\Delta l_s - \frac{3\Delta l}{2}),$$

де Δl_s – видовження системи. Отримавши його з цього рівняння, отримуємо коефіцієнт теплового розширення,

$$\alpha = \frac{1}{\Delta t}\frac{\Delta l_s}{l} = \frac{13\Delta l}{9l\Delta t}.$$

Зазначимо, що таким же чином розраховується і вигин біметалічної пластини, однак там вже прийдеться розраховувати деформації не поздовжні, а вигину.



2. «Лити-не перелити»

У великій ємності з гарячою водою плаває маленька теплоізольована циліндрична посудина, маса якої $\boldsymbol{m}$, внутрішній радіус $\boldsymbol{R}$, а товщина стінок і дна $\boldsymbol{d}$. В посудині знаходиться холодна вода, температура якої на $\boldsymbol{\Delta t_0}$ менша за температуру води у ємності. Початкова висота рівня води в посудині (відрахована уздовж її внутрішньої стінки) дорівнює $\boldsymbol{h_0}$. З ємності переливають порцію гарячої води у посудину, у результаті чого температура в ній підвищилася на $\boldsymbol{\Delta t_1}$. Однак після ще одного переливання такої ж порції вода почала переливатися через краї посудини. **Знайдіть повну висоту стінок посудини**. Знехтуйте тепловими втратами між водою і навколишнім середовищем за час проведення цього експерименту.

Розв'язання.

Запишемо умову теплової рівноваги після першого переливання,

$$c\rho \cdot \pi R^2 h_0 \cdot \Delta t_1 = c\rho \cdot \pi R^2 \Delta h \cdot (\Delta t_0 - \Delta t_1),$$

де c і ρ – питома тепло'мність і густина води. З цього рівняння знайдемо зміну рівня води в посудині при доливанні однієї порції води,

$$\Delta h = h_0 \frac{\Delta t_1}{\Delta t_0 - \Delta t_1}.$$

Це означає, що якщо після другого переливання вода починає переливатися через края, то повна висота посудини повинна дорівнювати

$$H = h_0 + 2\Delta_h + d = h_0 \frac{\Delta t_0 + \Delta t_1}{\Delta t_0 - \Delta t_1} + d. \quad (1)$$

Однак це вірно лише якщо переливання відбувається у напрямку з середини посудини назовні, що не завжди так. Дійсно, якщо маса посудини буде достатньо великою, то рівень води у ємності буде вищим, і умову того, що вода почне переливатися через края, знайдемо в цьому випадку з балансу сил тяжіння і Архімеда, що діють на посудину з водою після другого переливання:

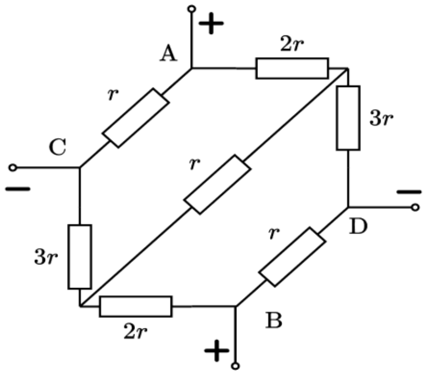
$$(m + \rho \cdot \pi R^2 (h_0 + 2\Delta h)) \cdot g = \rho g \cdot \pi (R + d)^2 H,$$

звідки для повної висоти посудини тепер маємо такий вираз,

$$H = \frac{m}{\pi (R + d)^2 \rho} + h_0 \frac{\Delta t_0 + \Delta t_1}{\Delta t_0 - \Delta t_1} \frac{R^2}{(R + d)^2}. \quad (2)$$

Отже відповіддю на задачу буде більше з двох значень, що задаються формулами (1) і (2).

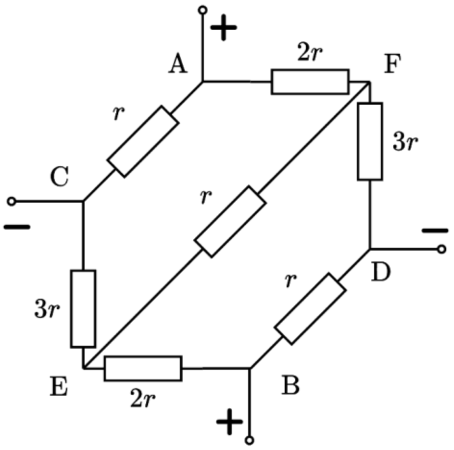
3. «Two In, Two Out? What is the Current, figure out!?»



Знайдіть струм, який буде текти **через** ідеальне **джерело напруги $\boldsymbol{U_0}$**, якщо його підключити до схеми на рисунку таким чином: контакти A, B з'єднати між собою та підключити до позитивного полюса джерела, а контакти C, D – так само до негативного.

Розв'язання

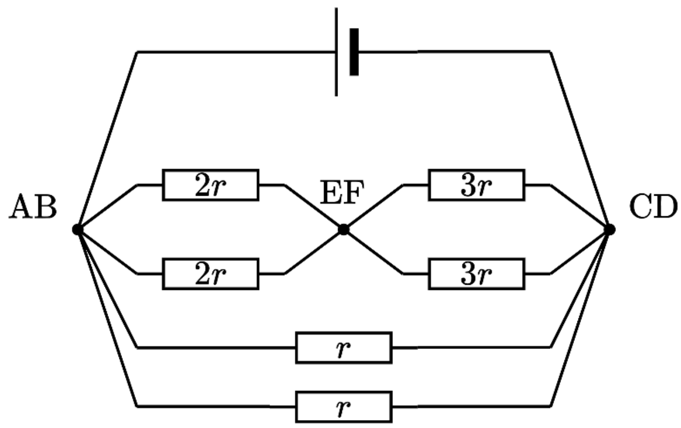
За умовою, точки A та B з'єднують між собою, отже вони мають однаковий потенціал. Аналогічно точки C та D буду з'єднані та матимуть однаковий потенціал. Знаючи це, легко помітити, що схема зображена на рисунку має симетрію поворотку на 180°. Розташування резисторів буде виглядати так само; точка A перейде в точку B і навпаки, аналогічно точки C та D, оскільки ці точки попарно мають однакові потенціали – підключення джерела теж ефективно не зміниться.



З цього випливає, що і потенціали точок E, F однакові, оскільки вони переходять одна в одну при повороті. Отже резистор r між ними можна прибрати.

Щоб зрозуміти схему яка залишиться, перемалюємо її. Для цього об'єднаємо точки з однаковими потенціалами (A з B, C з D та E з F) та перемалюємо всі з'єднання між ними. Між об'єднаною точкою AB та CD буде стояти два резистори r, які відповідають резисторам між A і C та між B і D. Аналогічно, між об'єднаною точкою AB та EF буде два резистори $2r$, а між CD та EF – два резистори $3r$. Також домалюємо ідеальне джерело між AB та CD (див. Рис.).

Еквівалентна схема складається тільки з послідовних та паралельних з'єднань. Опір між AB та EF буде $\frac{2r}{2} = r$, між EF та CD – $\frac{3r}{2}$. А повний опір буде відповідати паралельному з'єднанню $r + \frac{3r}{2} = \frac{5r}{2}$ із $\frac{r}{2}$.

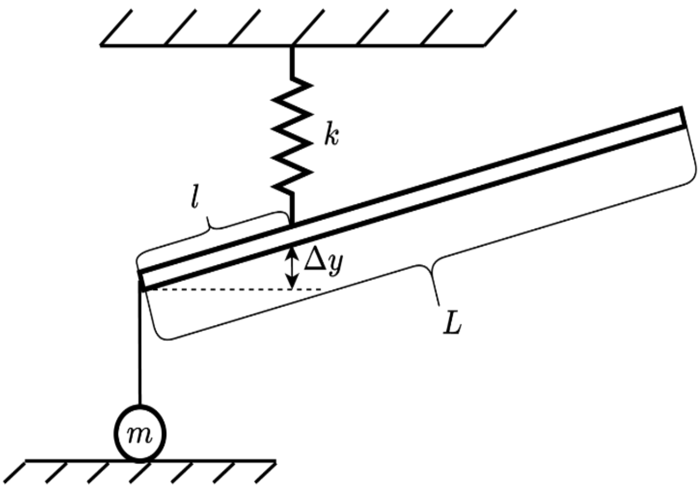


Отже повний опір дорівнює $\frac{\frac{5r}{2} \cdot \frac{r}{2}}{\frac{5r}{2} + \frac{r}{2}} = \frac{5}{12} r$.

Відповідно, струм через джерело буде $I = \frac{U_0}{\frac{5}{12} r} = \frac{12 U_0}{5r}$.

Відповідь: $I = \frac{12 U_0}{5r}$.

4. «Пружинний важіль».



Петру треба підняти вантаж маси m. Оскільки Петро добре вчив фізику, він вирішив спростити свою задачу та використати майже невагомий важіль довжини $\boldsymbol{L}$. Він вирішив підвісити важіль не на нитку, а на пружину жорсткості $\boldsymbol{k}$. Повна конструкція зображена на рисунку: тіло прикріплене до лівого краю, пружина прикріплена на відстані $\boldsymbol{l}$ від лівого краю. У початковий момент мотузка була не натягнута, але вертикальна, а важіль нахилений так, що точка кріплення пружини на $\boldsymbol{\Delta y}$ вище за лівий край (уважайте що нахил важелю невеликий).

Знайдіть:

А) **Яку мінімальну роботу** треба виконати Петру, прикладаючи силу до правого краю вертикально вниз, щоб перевести важіль в горизонтальне положення?

Б) **На скільки** при цьому **підніметься** тіло m?

Розв'язання

Щоб тіло почало підніматись спочатку має достатньо розтягнутись пружина. Перше що нам треба визначити – в який момент пружина перестане розтягуватись і почне підніматись тіло.

В цей момент на лівий край важеля буде діяти сила $F_1 = mg$, на правий край – сила Петра F_2, а пружина буде діяти з силою $F_{\text{пруж}}$. Правило моментів відносно правого краю дає:

$$F_1 L = F_{\text{пруж}}(L - l).$$

Тоді сила з боку пружини має бути

$$F_{\text{пруж}} = F_1 \frac{L}{L-l} = mg\frac{L}{L-l}.$$

Коли сила натягу пружини досягне цього значення, тіло почне підійматись. В той же час, із закону Гука можна знайти наскільки для цього пружина має розтягнутись: $F_{\text{пруж}} = kx$. Тоді

$$x = \frac{mg}{k}\frac{L}{L-l}.$$

Якщо $\Delta y < x$, то пружина не встигне достатньо розтягнутись перш ніж важіль стане горизонтальним. В такому випадку вантаж не підніметься зовсім, а вся робота Петра піде на розтягнення пружини:

$$A = \frac{k\Delta y^2}{2}.$$

Якщо $\Delta y > x$, то пружина встигне розтягнутись і вантаж підніметься на висоту $(\Delta y - x)$ коли важіль стане горизонтальним.

Щоб порахувати роботу яку треба виконати Петру ми використаємо закон збереження енергії. Робота Петра дорівнюватиме сумі роботи по розтягування пружини та підняття вантажа. Для того щоб розтягнути пружину йому треба виконати роботу $A_{\text{пруж}} = \frac{kx^2}{2}$, а щоб підняти тіло на висоту $(\Delta y - x)$ – $A_{\text{тіло}} = mg(\Delta y - x)$. Тоді повна робота Петра буде

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_{\text{пруж}} + \mathrm{A}_{\text{тіло}} = \frac{\mathrm{kx}^2}{2} + \mathrm{mg}(\Delta \mathrm{y} - \mathrm{x}),$$

Або підставляючи вираз для x:

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2\mathrm{k}}\left(\mathrm{mg}\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}-\mathrm{l}}\right)^2 + \mathrm{mg}\left(\Delta \mathrm{y} - \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{k}}\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}-\mathrm{l}}\right).$$

Як бачимо в жодному з випадків пружина Петру не допомогла. Скоріше навпаки – тепер йому треба виконувати додаткову роботу по розтягуванню пружини.

Відповідь:

Якщо $\Delta y < \frac{mg}{k}\frac{L}{L-l}$, то тіло не підніметься зовсім, Петру треба виконати роботу $A = \frac{k\Delta y^2}{2}$.

Якщо $\Delta y > \frac{mg}{k}\frac{L}{L-l}$, то тіло підніметься на висоту $(\Delta y - \frac{mg}{k}\frac{L}{L-l})$, Петру треба виконати роботу $A = \frac{1}{2k}\left(mg\frac{L}{L-l}\right)^2 + mg\left(\Delta y - \frac{mg}{k}\frac{L}{L-l}\right)$.

5. «Біфокальна лінза»

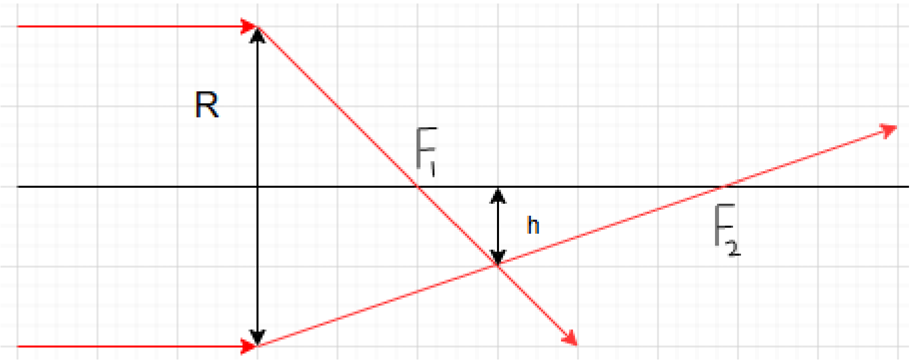
Тонка кругла лінза зроблена з двох двоопуклих половинок однакового радіуса кривизни (площина, яка розділяє половинки лінзи, містить головну оптичну вісь) та знаходиться в повітрі. Одна з половинок зроблена зі скла з коефіцієнтом заломлення ***n*=*1.5***, а інша з невідомої речовини. На лінзу спрямовують циліндричний плоскопаралельний потік світла з радіусом, рівним радіусу лінзи. Вісь симетрії потоку співпадає з головною оптичною віссю. З іншого боку лінзи перпендикулярно головній оптичній вісі ставлять великий рухомий плаский екран-детектор, який рахує інтенсивність світла наступним чином: повну потужність світлового потоку, яка падає на детектор, він ділить на площу освітленої області. Максимальна інтенсивність, яка була виміряна детектором, в ***n*** разів більша, ніж та, що падає на лінзу. Розглянувши два варіанта: **1) α=2; 2) α=8**,
Знайдіть:

А) Коефіцієнт заломлення матеріалу другої половинки лінзи.

Б) Чи є якісь **обмеження** на можливу величину α?

Примітка. Нагадаємо, що оптична сила двоопуклої лінзи з радіусом кривини сферичних поверхонь ***r*** та коефіцієнтом заломлення ***n*** дорівнює $\boldsymbol{D = \frac{2(n-1)}{r}}$.

Розв'язання.



Світло, яке йде від половинок лінзи, виглядає як напівконуси з різною висотою - F_1 та F_2. Будемо вважати, що $F_2 > F_1$. R – радіус лінзи.

На рисунку показана область напівкола радіусом h, в якій площа освітлення детектора буде найменшою.

З геометрії легко знайти, що $h = R\frac{F_2-F_1}{F_2+F_1}$. Нехай повна потужність випромінення, що падає на лінзу – P.

Інтенсивність випромінення при падінні на лінзу $I_0 = \frac{P}{\pi R^2}$, а середня інтенсивність в області з найменшою площею освітленої плями $I = \frac{P}{\pi h^2/2}$.

$$\alpha = \frac{I}{I_0} = \frac{2R^2}{h^2} = \frac{2(F_2+F_1)^2}{(F_2-F_1)^2}$$

$$\frac{F_2+F_1}{F_2-F_1} = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{2}}$$

Візьмемо розв'язок з плюсом, адже від'ємний розв'язок працює для випадку, коли $F_2 < F_1$, і він не дає нічого нового.

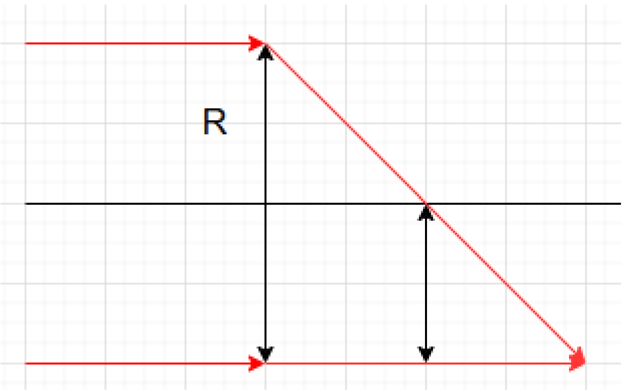
Оптичні сили напівлінз: $D_1 = \frac{1}{F_1} = \frac{2(n_1-1)}{r}$, $D_2 = \frac{1}{F_2} = \frac{2(n_2-1)}{r}$. Тоді,

$$\frac{1 + \frac{n_1 - 1}{n_2 - 1}}{\frac{n_1 - 1}{n_2 - 1} - 1} = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}.$$

Звідси,

$$\frac{\sqrt{\frac{\alpha}{2}} + 1}{\sqrt{\frac{\alpha}{2}} - 1} = \frac{n_1 - 1}{n_2 - 1}.$$

а) Бачимо, що при $\alpha = 2$ єдина можливість задовільнити рівняння згори це випадок, коли $n_2 = 1$. Тобто друга половинка не викривлює світло. Але насправді це можна було отримати без жодних формул чисто з рисунку потоків світла від лінз.



б) При $\alpha = 8$, $\frac{n_1-1}{n_2-1} = 3$.

Тепер є два варіанти:

1) $n_2 = n = 1.5$
   Звідси $n_1 = 2.5$.
2) $n_1 = n = 1.5$
   Звідси $n_2 = 7/6$.

Якщо дві половинки лінз є випуклими, то розсіювальну лінзу отримати не вийде, а отже α не може бути менше 2. Якщо ж коефіцієнти заломлення половинок лінзи однакові, то α стає дуже великим, адже розмір плями в фокусі лінзи прямуватиме до дуже маленького значення.

Задачі запропонували: 1-2. Майзеліс З.О., 3-4. Рідкокаша І.П., 5. Олійник А.О.