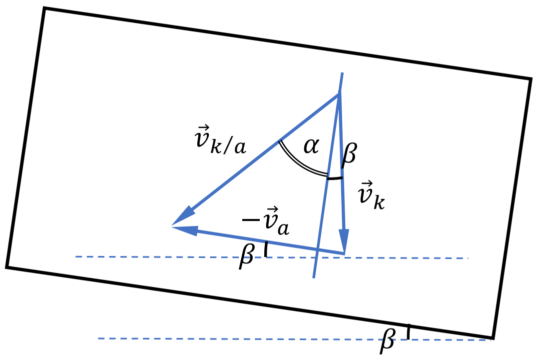
Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Український фізико-математичний ліцей Київського національного університету імені Тараса Шевченка
XXIV Всеукраїнська учнівська Інтернет-олімпіада з фізики
2024/2025 навчального року
І (заочний) етап ІІ тур
10 клас

1. «Під градусом»

У безвітряну погоду йде дощ. На горизонтальному шосе стоїть автомобіль, на боковому склі якого періодично з'являються водяні риски, паралельні вертикальній границі скла. А) **З якою швидкістю v_k** падають краплі дощу на землю, якщо після розгону автомобіля до швидкості v_a, риски на боковому склі відхилилися на кут α?
Б) Водій вирішив зберегти кут α на склі, незважаючи на те, що дорога стала періодично опускатися вниз і підніматися вгору. **Як має залежати швидкість автомобіля від кута** нахилу дороги β до горизонту, щоб нові водяні риски на боковому склі весь час залишалися паралельними до попередніх?
В) У гірський місцевості треба підніматися серпантином – звивистою дорогою, яка всюди утворює сталий кут до горизонту β. **Знайдіть відношення** частоти ударів крапель по корпусу автомобіля, коли той їде горизонтально, до частоти ударів крапель по корпусу автомобіля, коли той їде вгору таким серпантином (інтенсивність дощу однакова).

Розв'язання.

А) З прямокутного трикутника $v_k = v_a \mathrm{ctg}\alpha$.



Б) Припустимо, що дорога опукається під кутом β до горизонту. Тоді слід на склі, спрямований вздовж відносної швидкості краплі $\vec{v}_{k/a}$, має утворювати з вертикаллю кут $\alpha + \beta$. За законом додавання швидкостей (див. Рис.) і з теореми синусів маємо

$$\frac{v_a}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{v_k}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{v_{k/a}}{\sin(90° - \beta)},$$

звідки

$$v_a = v_k \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}.$$

Коли автомобіль піднімається вгору від кутом β, в останньому виразі робимо заміну $\beta \to -\beta$:

$$v_a = v_k \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha}.$$

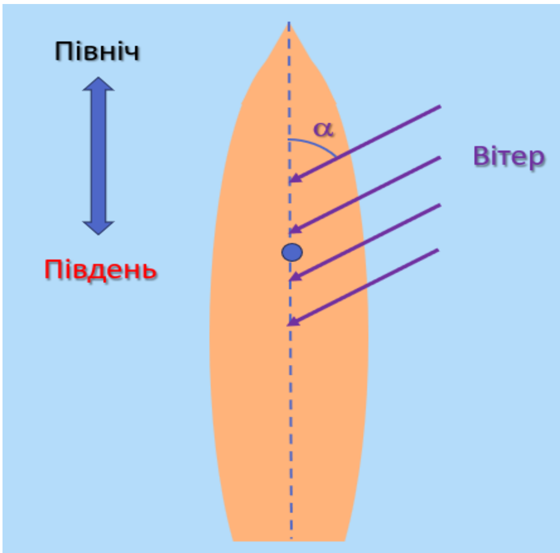
Звісно при цьому виникає обмеження $\beta < \alpha$. Якщо схил утворюватиме кут α з горизонтом ($\beta = \alpha$), тоді $v_a = 0$, автомобіль не рухатиметься, а краплі й так падатимуть на скло під потрібним кутом. На ще більшому схилі ($\beta > \alpha$) швидкість автомобіля $v_a < 0$, тобто для забезпечення потрібного кута він має спускатися задом. *Якби не розворот та проблема миттєвої зміни швидкості, це можна було б вважати додатковою відповіддю на питання* Б).

В) У системі відліку «автомобіль» краплі дощу весь час падають на нього під однаковим кутом, що той їде горизонтально, що під кутом β до горизонту. Отже, геометрія перехоплення корпусом автомобіля дощових крапель однакова, концентрація крапель за умовою задачі також однакова, тому відношення частот дорівнюватиме відношенню відносних швидкостей. З Рис. і з теореми синусів маємо:

$$v_{k/a} = v_k \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

Горизонтальному руху відповідає $\beta = 0$. Тому найчастіше краплі стучатимуть по автомобілю під час горизонтальної їзди. Якщо позначити середню частоту ударів під час руху під кутом β через ν_β, то $\nu_\beta = \nu_0 \cos\beta$. Оскільки косинус парна функція, частота ударів під час такого руху (зі збереженням кута α) вгору і вниз тією ж дорогою буде однаковою і не залежить від форми автомобіля. Це пояснюється тим, що рух вгору повільніший, ніж вниз, а лінії дощу весь час нахилені до корпусу автомобіля однаково.

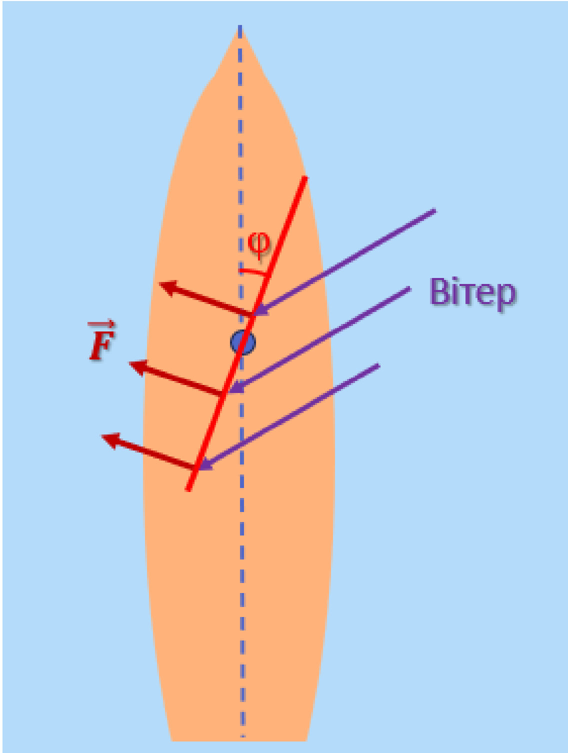
2. <u>*«Реклама – двигун прогресу»*</u>



Після аварії судна група пасажирів опинилася на безлюдному острові. Вони не сиділи без діла — з уламків свого судна спорудили нове, своєрідний вітрильник. Замість вітрила вони пристосували великий вертикальний рекламний щит, який можна було повертати навколо вертикальної осі (щогли). Серед пасажирів виявився юний фізик, який встановив: коли вітер дме перпендикулярно площині вітрила, це вітрило «перехоплює» певний повітряний потік та «відбирає» в нього весь імпульс. Якщо ж вітер дме паралельно площині вітрила, то вплив на рух судна відсутній. Так само відсутні й будь-які вихорі в повітряному потоці. Саморобне судно виявилося не дуже досконалим: навіть за попутного вітру швидкість руху судна була набагато меншою за швидкість вітру. Судно вийшло дуже вузьким і довгим, тому могло рухатися *тільки* в напрямі свого кіля (від корми до носу). Сила опору води, була пропорційною до квадрата швидкості руху судна. Попередні розрахунки показали: навіть якщо вітер попутний (південний), швидкість руху буде лише 0,33 км/год. Але виявилося, що цієї пори року вітер весь час зустрічний і дме під кутом $\alpha = 60°$ до меридіану (див. рисунок). **Визначте максимальну можливу швидкість** руху судна на північ.

Розв'язання.

Позначимо швидкість вітру v, швидкість руху судна u, площу вітрила S, густину повітря ρ. Оскільки за умовою $u \ll v$, повітря рухається відносно вітрила теж зі швидкістю v.



Коли вітер попутній, найвигідніше повернути площину вітрила перпендикулярно до напряму вітру. Тоді вітрило за час t «перехоплюватиме» об'єм повітря Svt та отримуватиме від цього повітря імпульс $\rho Svt \cdot v$. Інакше кажучи, за одиницю часу вітрильник отримує імпульс ρSv^2, тобто вітер створює «силу тяги» $F_{\text{тяг}} = \rho Sv^2$. Під час рівномірного руху судна цю силу зрівноважує сила опору води $F_{\text{оп}} = ku^2$, де k — сталий коефіцієнт.

Отже, за попутного вітру $u_{\max} = v\sqrt{\frac{\rho S}{k}}$.

Коли напрям вітру майже точно зустрічний, вітрило все ж таки може забезпечити певну «силу тяги», як показано на рисунку. Адже повітря діятиме на вітрило з силою F, що залежить від складової швидкості вітру $v\sin(\alpha - \varphi)$, нормальної до площини вітрила: $F = \rho Sv^2 \sin^3(\alpha - \varphi)$. Ми врахували, що в даному випадку вітрило «перекриває» повітряний потік з поперечним перерізом $S\sin(\alpha - \varphi)$.

Силу $\vec{F}$ можна розкласти на дві складові. Одна з них — сила тяги, напрямлена на північ: $F_{\text{тяг}} = F\sin\varphi = \rho Sv^2 \sin^3(\alpha - \varphi)\sin\varphi$. Інша ж — бокова сила, яка практично не впливає на рух судна.

Прирівнявши модулі сил тяги та опору, отримуємо:

$$u^2 = \frac{\rho Sv^2}{k}\sin^3(\alpha - \varphi)\sin\varphi = u_{\max}^2 \sin^3(\alpha - \varphi)\sin\varphi.$$

Залишається дослідити залежність $u^2(\varphi)$. Прирівнявши нулю відповідну похідну, маємо

$$\cos\varphi\sin(\alpha - \varphi) - 3\sin\varphi\cos(\alpha - \varphi) = 0,$$

або $3\,\text{tg}\alpha\,\text{tg}^2\varphi + 4\,\text{tg}\varphi - \text{tg}\alpha = 0$.

Звідси $\text{tg}\varphi = 0{,}31$ і $\varphi = 17°$.

Таким чином, $u = 0{,}3u_{\max} = 0{,}1$ км/год.

3. *«Ядерний більярд»*

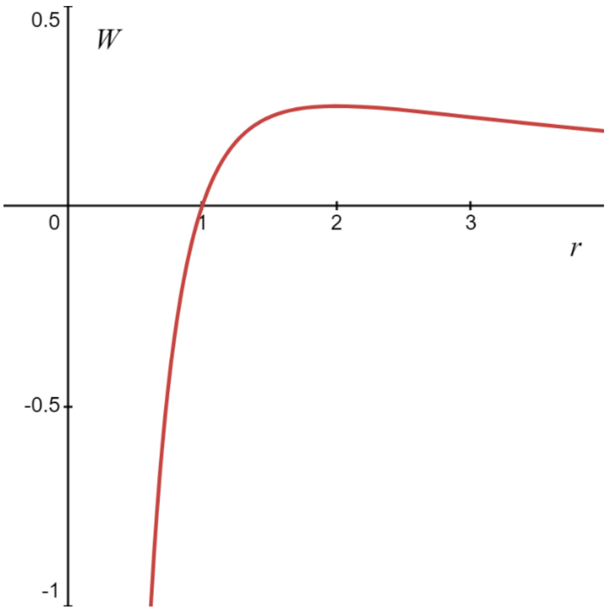
Яку мінімальну енергію повинна мати α-частинка (ядро гелію-4) масою m_α щоб при лобовому ударі з нерухомим ядром хімічного елемента з порядковим номером Z та масою m_z -частинка напевне потрапила у ядро-мішень і стала причиною ядерної реакції. Зрозуміло, що в даній ситуації потрібно брати до уваги ядерні сили, які виникають між ядрами, тому можете вважати, що енергія ядерної взаємодії дорівнює $W_{яд} = -\frac{\alpha}{r^2}$, де $\alpha > 0$, а r – відстань між ядрами. Уважайте, що початкова швидкість руху α-частинки значно менша за швидкість світла.

Розв'язання

Знайдемо повну енергію взаємодії двох ядер додавши до енергії ядерної взаємодії електростатичну взаємодію між ядрами:

$$W(r) = -\frac{b}{r^2} + k\frac{(2q_e)(Zq_e)}{r} = -\frac{b}{r^2} + k\frac{2Zq_e^2}{r}$$

Нарисуємо вигляд функції цієї енергії взаємодії в залежності від відстані між ядрами (для прикладу будуємо графік рівняння $W(r) = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}$).



Бачимо наявність максимуму енергії. Якщо ядра опиняться на відстані меншій ніж відповідає цьому максимуму енергії, то далі вони вже притягнуться і відбудеться ядерна реакція.

Отже, знайдемо відстань на якій енергія досягає максимуму взявши похідну та прирівнявши її до нуля.

З умови $W'(r) = 0$ отримуємо, що максимум досягається при $r_m = \frac{b}{kZq_e^2}$.

Запишемо закони збереження імпульсу та енергії для випадку зіткнення ядер (після зіткнення вони стають одним цілим в момент наближення на відстань r_m після чого починають зближуватись і відбувається остаточне захоплення) в нерелятивістському випадку:

$$m_\alpha V_0 = (m_\alpha + m_Z)V$$

$$\frac{m_\alpha V_0^2}{2} = \frac{(m_\alpha + m_Z)V^2}{2} + W(r_m) = \frac{(m_\alpha + m_Z)V^2}{2} + \frac{(kZq_e^2)^2}{b}$$

Розв'язуючи дану систему отримуємо, що початкова енергія α-частинки має бути

$$\frac{(kZq_e^2)^2}{b}\frac{m_Z+m_\alpha}{m_Z}.$$

4. *<u>«Допоможіть Робінзонам!»</u>*

Біля берегів безлюдного тропічного острова потонуло торгівельне судно. У катастрофі вижило декілька членів екіпажу, які висадились на березі острова. Разом з ними хвилі викинули на берег декілька скринь, в яких «новоприбулі аборигени» знайшли масу потрібних та не зовсім речей, серед яких була й зорова труба. Діаметр об'єктива труби 5 см, оптична сила його лінзи +1,25 дптр, а оптична сила окуляра + 14 дптр. У результаті контакту зорової труби з морською водою її тубус намертво заклинило в позиції, яка відповідає ідеальному наведенню на різке зображення для об'єктів, які знаходяться на відстані 400 м від об'єктиву. Мешканці острова хотіли б мати можливість не напружуючи очі чітко бачити в трубу об'єкти й на великій від берега відстані для того, щоб подати сигнал про допомогу, причому мирному, а не піратському кораблю. Підкажіть «Робінзонам», **що і як вони повинні зробити** для того, щоб зорова труба працювала так, як їм потрібно? Розбирати трубу та використовувати інші лінзи не дозволяється.

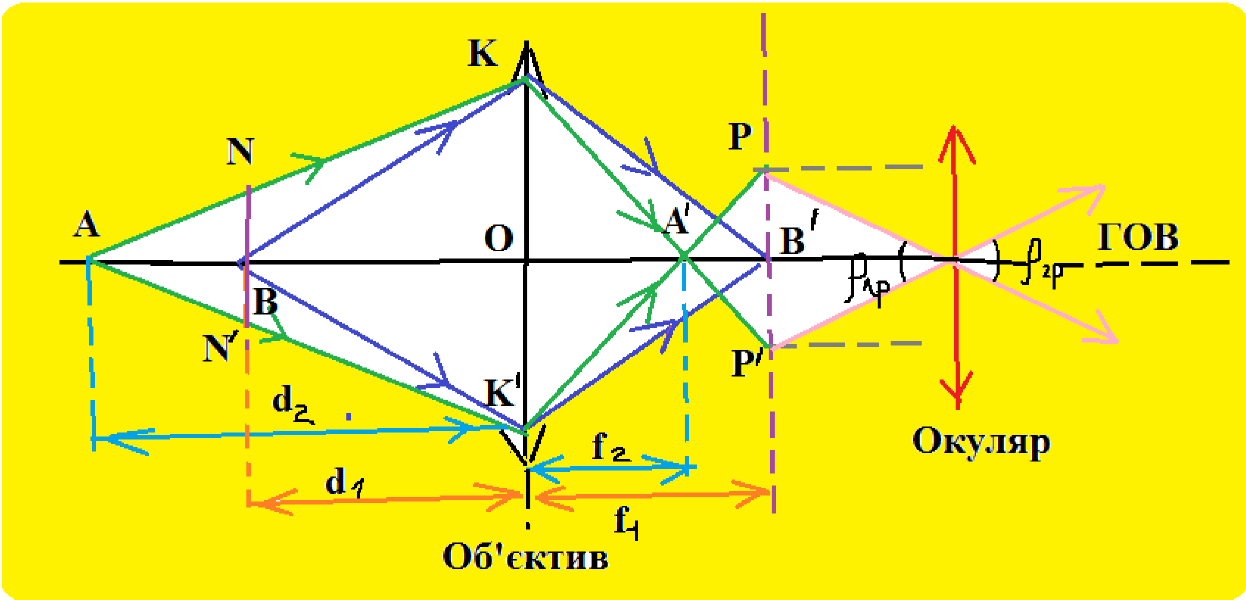
Уважайте, що оптична система зорової труби є ідеальної центрованою, а кутова роздільна здатність ока людини складає 2′. Прийміть, що під чітким (не розмитим) зображенням необхідно розуміти таке, яке забезпечує відхилення від ідеального (стигматичного) зображення не більш ніж на величину кутової роздільної здатності ока людини (2'). До речи, вам у нагоді може стати наступне посилання:

https://uk.wikipedia.org/wiki/Глибина_різко_зображуваного_простору
https://uk.wikipedia.org/wiki/Апертура
https://gsminfo.com.ua/55880-prostyj-sposib-dobre-bachyty-bez-okulyariv-i-linz.html

<u>Розв'язання</u>

Розглянемо рис. На ньому: ГОВ – головна оптична вісь системи зорової труби; КК′ – апертура (діаметр) об'єктиву; В – точка простору (об'єкт) на який сфокусована зорова труба; В′ – стигматичне (точкове) зображення В в трубі; d_1 – відстань від В до об'єктива; В′ – стигматичне (точкове) зображення В створене оптичною системою труби; А – точка простору (об'єкт) який ми бажаємо бачити чітким (не розмитим) в зорові трубі; d_2 – відстань від об'єктиву до А; f_2 – відстань від стигматичного (сфокусованого) зображення В в оптичній системі зорової труби до об'єктиву; f_1 – відстань від стигматичного (сфокусованого) зображення А в оптичній системі зорової труби (точки

A′) до об’єктиву; NN′ – ширина пучка променів, які виходять з A в перерізі на перпендикулярну до ГОВ площину, що проходить через B; PP′ – так званий кружечок розмиття – переріз пучка променів, що виходять з точки A′ площиною, яка проходить через точку B′ перпендикулярно до ГОВ; $\rho_{гр}$ – кут бачення кружечку розмиття PP′ через оптичну систему окуляра.



Для знаходження діаметру PP′ кружечка розмиття спочатку розглянемо допоміжний відрізок NN′ – ширина пучка променів, які виходять з A в перерізі на перпендикулярну до ГОВ площину, що проходить через B. Трикутники ANN′ та AKK′ подібні (за трьома кутами), тому можемо записати

$$AB/NN' = KK'/AO,$$

або ж

$$(d_2 - d_1)/NN' = d_2/KK'.$$

Звідси

$$NN' = (d_2 - d_1) \times KK'/d_2.$$

Позначимо NN′ = d_o, KK′ = $D^*_{об}$. Тоді можемо записати

$$d_o = (d_2 - d_1) \times D^*_{об}/d_2. \qquad (1)$$

Лінійне кутове збільшення оптичної системи зорової труби

$$\Gamma = f_1/d_1, \qquad (2)$$

де враховано, що f_1 та d_1 – додатні величини.

Зрозуміло, що діаметр PP′ кружечка розмиття можна отримати зауваживши, що

$$PP' = d_o \times \Gamma \qquad (3)$$

Позначивши PP′ = d_p та виходячи з (1)-(3) отримуємо

$$d_p = (d_2 - d_1) \times D^*_{об}/d_2 \times (f_1/d_1) \qquad (4)$$

З формули тонкої лінзи

$$\frac{1}{F_{об}} = \mathrm{D}_{об} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{d_1},$$

звідси

$$f_1 = \frac{d_1}{\mathrm{D}_{об} d_1 - 1} \qquad (5)$$

з (4) та (5)

$$d_p = (d_2 - d_1) \times \mathrm{D}^*_{об}/d_2 \times \frac{1}{\mathrm{D}_{об} d_1 - 1} \qquad (6)$$

За умовою мешканці острова хотіли б мати можливість чітко бачити в трубу об'єкти на великій від берега. Тому візьмемо в останньому виразі границю при $d_2 \to \infty$. Маємо

$$d_{p\infty} = \lim_{d_2 \to \infty} d\mathrm{p} = \lim_{d_2 \to \infty} \left((d_2 - d_1) \times \mathrm{D}^*_{об}/d_2 \times \frac{1}{\mathrm{D}_{об} d_1 - 1}\right) = \mathrm{D}^*_{об} \times \frac{1}{\mathrm{D}_{об} d_1 - 1}.$$

Отже

$$d_{p\infty} = \mathrm{D}^*_{об} \times \frac{1}{\mathrm{D}_{об} d_1 - 1}. \qquad (7)$$

Так як через окуляр зорової труби ми розглядаємо предмети, що знаходяться на доволі великій відстані, то можна вважати, що маємо фактично телескопічну системи в якій фокуси окуляра та об'єктива співпадають між собою. Тому (див. рис.) можемо записати

$$f_{ок} \times \mathrm{tg}\, \rho_{гр} = d_{p\infty}.$$

Враховуючи малість кута $\rho_{гр}$ в останній рівності можемо замінити тангенс значенням $\rho_{гр}$, вираженим у радіанній мірі

$$f_{ок} \times \rho_{гр} = d_{p\infty},$$

або

$$\rho_{гр}/\mathrm{D}_{ок} = d_{p\infty}, \qquad (8)$$

де $\mathrm{D}_{ок}$ – оптична сила окуляра.

З виразів (7) та (8) виходить

$$\rho_{гр}/\mathrm{D}_{ок} = = \mathrm{D}^*_{об} \times \frac{1}{\mathrm{D}_{об} d_1 - 1},$$

звідси

$$\mathrm{D}^*_{об} = (\mathrm{D}_{об} d_1 - 1)\, \rho_{гр}/\mathrm{D}_{ок} \qquad (9)$$

Підставимо в робочий вираз (9) задані та обчислені параметри. Виходить

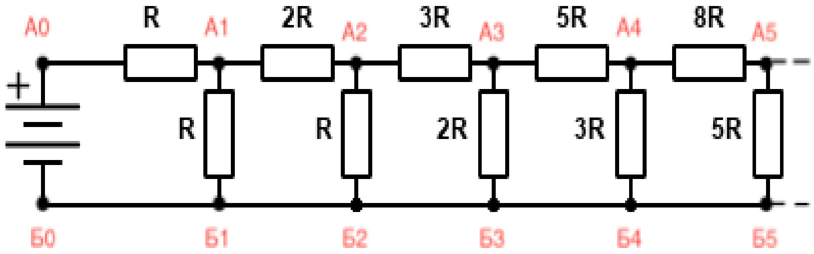
$$\mathrm{D}^*_{об} = 0{,}02 \text{ м} = 2 \text{ см}.$$

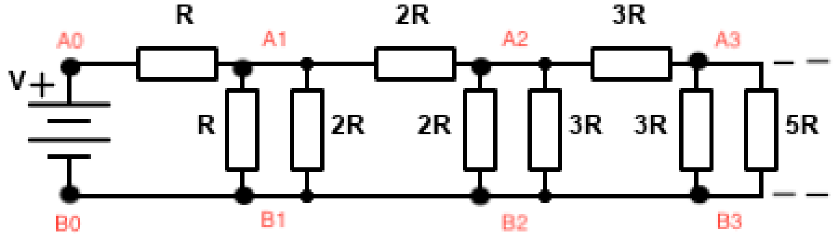
/Врахували, що $\rho_{гр} = 2' \approx 5{,}82 \times 10^{-4}$ рад/.

Приходимо до висновку про те, що для виконання бажання робінзонів про можливість чітко бачити в трубу *об'єктив зорової труби необхідно діафрагмувати, зменшивши його діаметр з наявних* 5 *см до* 2 *см.*

Відповідь: об'єктив зорової труби необхідно діафрагмувати до 2 см.

5. ***«Електричне коло від Фібоначчі»***

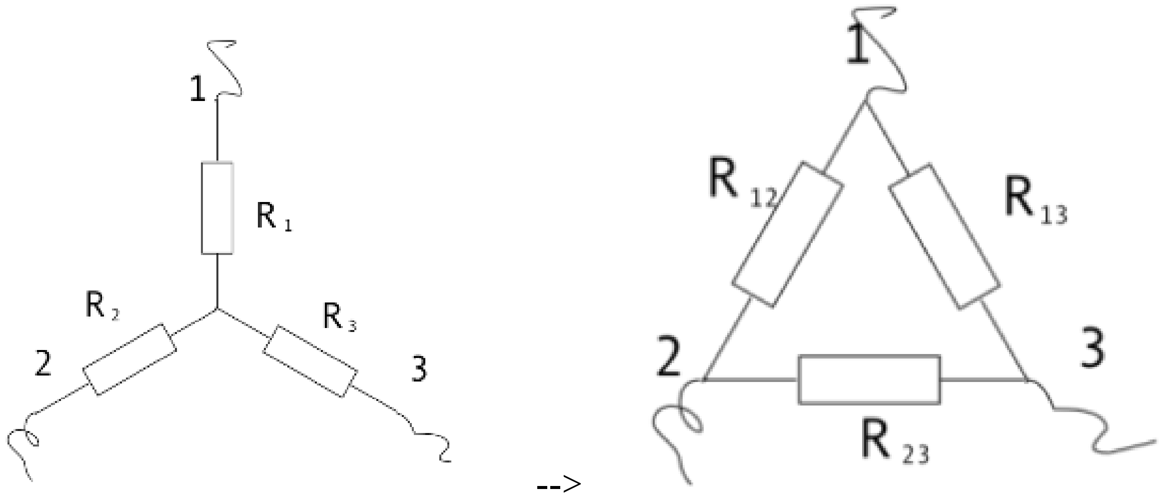




На рисунку зображено нескінченне коло з резисторів. Опори резисторів між точками A_iA_{i+1} та $A_iБ_i$ мають вам нагадати числовий ряд Фібоначчі. Відомо, що опір кола дорівнює $\boldsymbol{\alpha \cdot R}$, де $\boldsymbol{\alpha}$ - відомий коефіцієнт, **R** - опір першого резистора. Замінимо кожен з резисторів між точками $A_iБ_i$ на два паралельно з'єднаних резистори, опори яких дорівнюють наступним двом за значенням числа в ряду Фібоначчі (див. рис.) Спробуйте якомога точніше **знайти опір нової схеми** у вигляді R_∞=**f(α)·R**

Розв'язання

Розглянемо відоме перетворення «зірки» в «трикутник» для резисторів:



Розглянемо наведені вище схеми відносно виводів 1 та 2.

У схемі «трикутник» резистор R_{12} з'єднаний паралельно з послідовно з'єднаними резисторами R_{13} і R_{23} відповідає послідовно з'єднаним опорам R_1 і R_2 в схемі «зірка». Повторюючи аналогічні дії для інших виводів маємо :

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12} \cdot (R_{23} + R_{13})}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}$$

$$R_1 + R_3 = \frac{R_{13} \cdot (R_{23} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}$$

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23} \cdot (R_{13} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь відносно опорів R_{12}, R_{13} і R_{23} отримаємо формули для перетворення із «зірки» в «трикутник»:

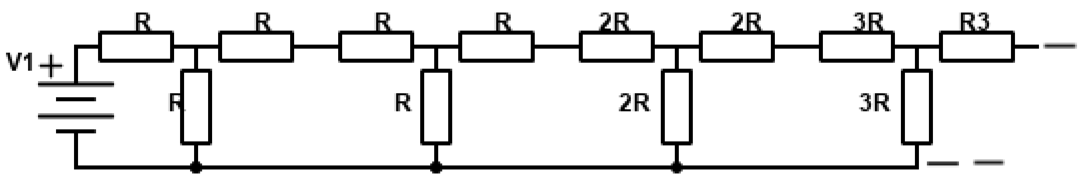
$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}$$

$$R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}$$

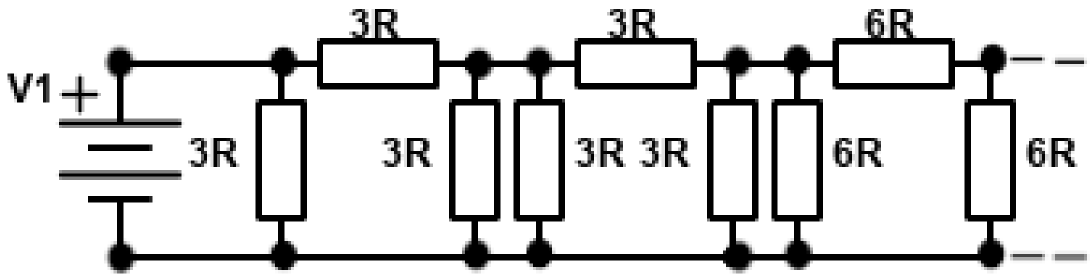
$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}$$

Тепер перейдемо до вирішення задачі:

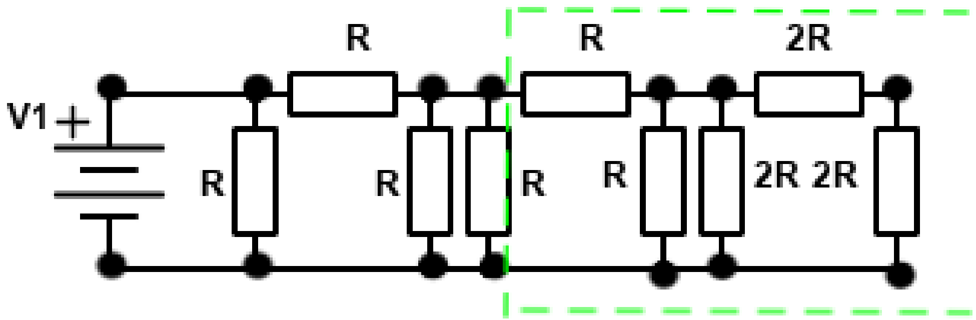
Розіб’ємо кожен резистор окрім нульового між точками A_iA_{i+1} на два послідовно з’єднаних попередні два за значенням в ряду Фібоначчі та об’єднаємо усі резистори у зірки як показано на рисунку:



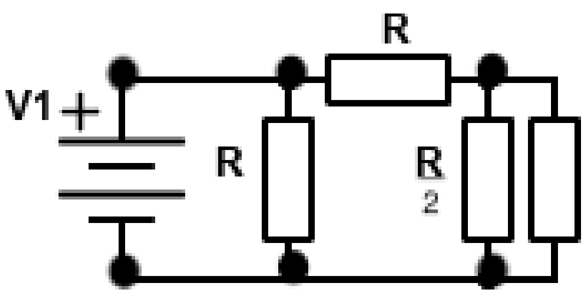
Після цього застосуємо перетворення «зірки» в «трикутник» для кожної зірки.



Тепер можна побачити що усі елементи ланцюга кратні 3, а отже можна привести ланцюг до наступного вигляду з загальним опором $\frac{\alpha R}{3}$:



Тепер можна легко помітити що усе що знаходиться правіше зеленої лінії і є шукане значення $f(\alpha)R$. Тепер замінимо усе що знаходиться в зеленому квадраті на резистор з опором $f(\alpha)R$. Таким чином отримуємо наступне коло:



Не забуваючи врахувати що загальний опір кола рівний $\frac{\alpha R}{3}$ отримуємо наступне співвідношеня:

$$\frac{\alpha}{3}R = \frac{R\left(R + \dfrac{f(\alpha)R \cdot \dfrac{R}{2}}{f(\alpha)R + \dfrac{R}{2}}\right)}{2R + \dfrac{f(\alpha)R \cdot \dfrac{R}{2}}{f(\alpha)R + \dfrac{R}{2}}}$$

Нарешті, після нескладних підрахунків отримуємо точне значення для $f(\alpha)$:

$f(\alpha) = \frac{2\alpha-3}{9-5\alpha}$.

Невеличкий додаток для допитливих: $\alpha \approx 1.7382$

Задачі запропонували: 1.Орлянський О.Ю. 2. Гельфгат І.М. 3. Олійник А.О. 4. Шевчук О.Г. 5. Абдулханов А.М.