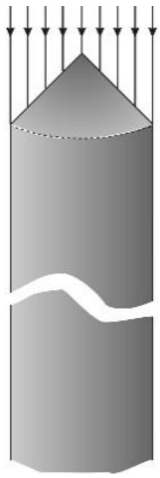
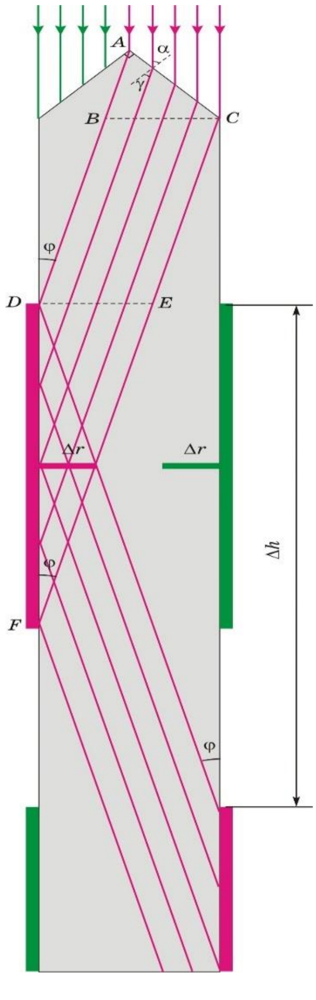
Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Український фізико-математичний ліцей Київського національного університету імені Тараса Шевченка
XXIV Всеукраїнська учнівська Інтернет-олімпіада з фізики
2024/2025 навчального року
І (заочний) етап І тур
11 клас

1. <u>«Оптика циліндру»</u>



Налагоджуючи нове обладнання, молоді робітники навчилися виготовляти на ньому довгі циліндри радіусом $\boldsymbol{r} = 10$ мм з прозорого пластика. Технологічний процес давав на нижньому кінці циліндра плоску поверхню, перпендикулярну до осі циліндра, а на верхньому кінці — конічну поверхню з кутом біля вершини 90° (див. рисунок). Усі поверхні виробу виходили гладенькими, а висоту циліндра можна було змінювати в широких межах. Робітники дізналися, що показник заломлення пластика дорівнює 1,41. Вони дослідили проходження паралельних пучків світла (в напрямі осі) через циліндри різної висоти, наближаючи нижні торці циліндрів близько до аркушу паперу на столі. Виявилося, що на папері може утворюватися світла пляма в формі круга або в формі кільця, залежно від висоти h циліндра. Збільшуючи h, вони спостерігали періодичну зміну форми світлої плями з періодом Δh. Визначте **найбільше можливе значення внутрішнього радіуса** кільця та **значення періоду $\boldsymbol{\Delta h}$**. Поглинанням світла в пластику знехтуйте.



Розв'язання.

Розглянемо переріз виробу площиною, що проходить через вісь симетрії. Для спрощення рисунку розглянемо спочатку лише світлові промені, що падають на правий «схил» конічної поверхні (на рисунку, вони показані червоними, це ніяк не пов'язано зі справжнім кольором). Кут падіння α цих променів дорівнює 45°. Із закону заломлення знаходимо кут заломлення γ: $\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{n}$, звідки $\gamma = 30°$. Отже, після заломлення промені відхиляються від вертикалі на кут $\varphi = \alpha - \gamma = 15°$. Кут падіння світла на бічну поверхню циліндра (75°) значно перевищує граничний кут повного відбивання. Тому, як бачимо з рисунку, світло не виходить через бічну поверхню назовні, а промені всюди всередині пластика утворюють кут $\varphi = 15°$ з вертикаллю. Світло почергово потрапляє на ділянки поверхні, позначені вертикальними червоними смугами. Визначимо з трикутника ABC ширину BC

горизонтального перерізу «червоного» пучка. Оскільки кути трикутника дорівнюють 60, 75 і 45°, отримуємо:

$$BC = AC\frac{\sin 60°}{\sin 75°} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{r}{\sin 75°} = r\sqrt{6\left(2-\sqrt{3}\right)} = 1{,}27r$$

(на олімпіаді, зрозуміло, швидше відразу скористатися калькулятором). Для отримання повної картини слід додати ще «зелені» промені, що падають на лівий «схил» конічної поверхні і йдуть симетрично до «червоних» відносно осі виробу.

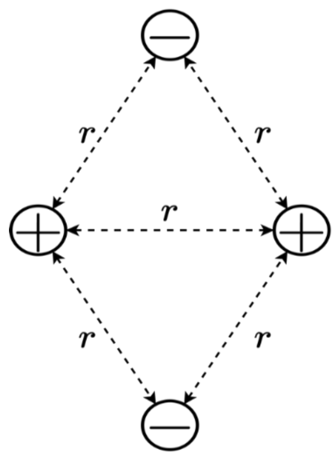
Очевидно, що найменша товщина Δr світлого кільця (тобто найбільший його внутрішній радіус $r_{\text{темн}}$) спостерігається на рівні середини вертикальних смуг (червоних і зелених). Отже, отримуємо:

$$r_{\text{темн}} = r - \Delta r = r - \frac{BC}{2} = 0{,}37r = 3{,}7\ \text{мм}.$$

Період Δh легко знайти з прямокутного трикутника DEF (де $DE = BC$):

$$\Delta h = 2r\ \mathrm{ctg}\ \varphi = 75\ \text{мм}.$$

2. «Молекула водню»



Юний дослідник, знаючи, що в хімічній реакції горіння, виділяється купа енергії, почав висувати теорії, які, на його думку, могли б пояснити це явище: звідки ж ця енергія береться? Після нетривалих роздумів, хлопець, спираючись на свої знання про будову молекули водню H_2, та найпростішої хімічної реакції:

$2H \rightarrow H_2$, висунув таку теорію…

Атом водню H складається з одного протону і електрону. Нехай вони будуть просто знаходитись у спокої на відстані $r = 0.1$ нм і ближче один до одного вони наблизитись не можуть. Два таких атоми поряд теж почнуть притягуватись і в нашій моделі в кінці утворять систему з двох рівносторонніх трикутників як на рисунку, де плюсами позначені протони, а мінусами – електрони. Сторона трикутників має таку ж довжину $r = 0.1$ нм. Ця система, згідно запропонованій теорії, і буде відповідати молекулі водню H_2.

А) **Чи не здається** вам ця будова молекули водню нереалістичною? Якщо так, то **обґрунтуйте** свою відповідь.
Б) **Знайдіть, скільки енергії за цією моделлю** виділиться, якщо $\boldsymbol{m} = 1$ кг атомарного водню повністю перетвориться на молекулярний водень.

Заряд протону $q_p = e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл, заряд електрону $q_e = -e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл, маса одного атому водню $m_H = 1.67 \cdot 10^{-27}$ кг, 1 нм $= 10^{-9}$ м.

Розв’язання.

А) Як ми з вами знаємо атоми та молекули є стабільними та якщо їх не чіпати можуть існувати в такому стані роками. Якщо подивитись на запропоновану модель молекули – в ній електрони не знаходяться в рівновазі (сила притягання від протонів більша ніж відштовхування від протилежного електрону). Більше того, як відомо з теореми Ірншоу, будь-яка комбінація зарядів не може знаходитись в стійкій рівновазі тільки завдяки силам Кулона. Тобто навіть якщо трохи змінити геометрію системи, рівновага такої молекули не буде стійка, а отже такі молекули не можуть довго існувати в природі.

Є декілька способів вирішити цю проблему. Наприклад, ввести додаткову силу відштовхування, яка б не підпускала частинки ближче ніж на $r = 0.1$ нм. Це можна собі уявити таким чином – нехай кожен електрон та протон це тверді кульки радіусом $r/2$. Тоді дійсно вони зберуться у конфігурацію, яку запропонував молодий дослідник. Інший спосіб, який історично використовувався для моделі атома водню – постулювати, що електрони обертаються навколо протонів. Тоді сили Кулона будуть компенсувати дію відцентрових сил.

Насправді, виявляється, що обидва ці пояснення неправильні і єдиний спосіб скласти правильну модель атома та молекули водню – використовувати квантову механіку. В той же час, проста запропонована модель дозволяє якісно зрозуміти, чому молекулам вигідно утворюватися та по порядку величини оцінити енергію, що виділяється за таких реакцій.

Б) Використовуючи формулу для потенціальної енергії електростатичної взаємодії двох зарядів, можна знайти потенціальну енергію одного атому водню в нашій моделі. Це буде:

$$E_{\text{атом}} = k\frac{q_p q_e}{r} = -k\frac{e^2}{r}.$$

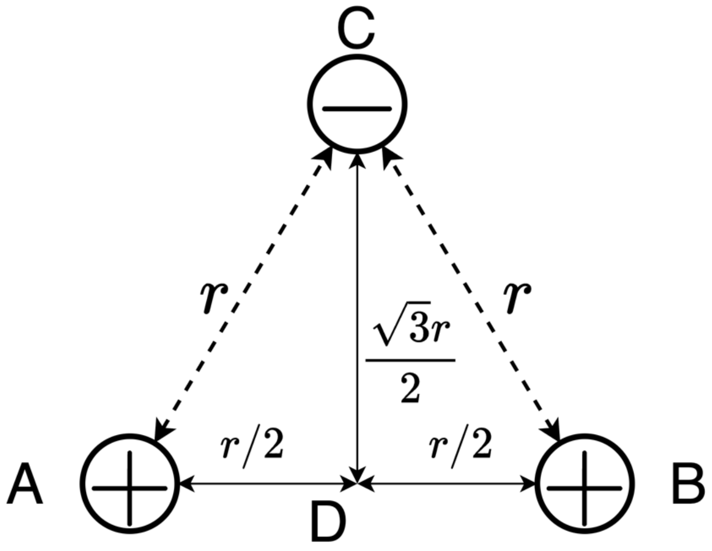
Енергія вийшла від’ємною – це наслідок того, що електрон та протон притягаються.

Тепер розглянемо молекулу водню в нашій моделі. Щоб знайти повну потенціальну енергію молекули нам треба врахувати всі попарні взаємодії. Це буде: 4 взаємодії протон-електрон, 1 взаємодія протон-протон та 1 взаємодія електрон-електрон. Всі відстані між протонами та електронами рівні та рівні r, тому енергія кожної такої взаємодії буде як енергія атома: $E_{p-e} = -k\frac{e^2}{r}$. Енергія взаємодії між протонами буде схожа, але додатня (оскільки протони відштовхуються): $E_{p-p} = k\frac{e^2}{r}$.

Тепер знайдемо енергію взаємодії двох електронів, для цього спочатку знайдемо відстань між ними. Розглянемо верхній трикутник ABC з електрону та двох протонів та проведемо висоту CD (див. рисунок). Оскільки трикутник рівносторонній, то висота буде також грати роль медіани та ділити відрізок AB навпіл, значить $AD = DB = r/2$. Використовуючи це, висоту CD можна знайти з теореми Піфагора: $CD =$

$\sqrt{CB^2 - DB^2} = \sqrt{r^2 - (r/2)^2} = \frac{\sqrt{3}r}{2}$. Відстань між електронами вдвічі більше за висоту: $r_e = \sqrt{3}r$.

Тоді енергія взаємодії двох електронів вийде $E_{e-e} = k\frac{e^2}{r_e} = k\frac{e^2}{\sqrt{3}r}$.



Повна енергія молекули водню тоді виходить:

$$E_{\text{мол}} = 4E_{p-e} + E_{p-p} + E_{e-e} = -4k\frac{e^2}{r} + k\frac{e^2}{r} + k\frac{e^2}{\sqrt{3}r} = \left(-3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)k\frac{e^2}{r}.$$

Легко помітити, що потенціальна енергія молекули менша за потенціальну енергію початкових двох атомів:

$2E_{\text{атом}} = -2k\frac{e^2}{r}$.

Куди ж дівається зайва енергія? Вона переходить в кінетичну енергію молекули, що утворилась, та атомів/молекул навколо – тобто в теплову енергію.

Із закону збереження енергії випливає, що при утворенні однієї молекули виділяється така кількість тепла

$$Q = 2E_{\text{атом}} - E_{\text{мол}} = -2k\frac{e^2}{r} - \left(-3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)k\frac{e^2}{r} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)k\frac{e^2}{r}.$$

Або підставляючи числа

$$Q = 9.7 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж}.$$

Щоб порахувати енергію яка виділиться для 1 кг атомів водню, треба знайти скільки утвориться молекул. Для цього треба просто всю масу розділити на масу однієї молекули. Оскільки кожна молекула складається з двох атомів водню: $m_{H_2} = 2m_H$. Тоді кількість молекул:

$$N = \frac{m}{2m_H} = \frac{1}{2 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}} = 3.0 \cdot 10^{26}.$$

Значить, повна енергія, яка виділиться дорівнює:

$$Q_{\text{повна}} = NQ = 3.0 \cdot 10^{26} \cdot 9.7 \cdot 10^{-19} \approx 300 \text{ МДж}.$$

Відповідь: 300 МДж.

3. **«Безпечні перевезення»**

Маршрут автомобіля, що перевозить в закритій та повністю заповненій цистерні рідину густиною $\boldsymbol{\rho}$, проходить низкою прямолінійних та криволінійних ділянок. Криволінійні ділянки – дуги кіл. Найбільший радіус криволінійної ділянки $\boldsymbol{R_{max}}$ менш, ніж в два рази, більший за найменший радіус $\boldsymbol{R_{min}}$ заокруглення дороги. Відомо, що гальмівний шлях автоцистерни в умовах сталої дії гальм не повинен бути більшим за піврізницю між найбільшим та найменшим радіусами заокруглень дороги. Чому дорівнює **максимальне дозволене значення швидкості руху** автоцистерни на цьому маршруті, якщо відомо, що припустиме граничне навантаження на стінку цистерни дорівнює $\boldsymbol{F_{гр}}$? Цистерна має форму кубу з довжиною ребра $\boldsymbol{h}$. Коефіцієнт тертя між шинами та дорогою вважати великим, проковзування шин ніколи не наступає. Уважати, що автомобіль може розганятися чи гальмувати тільки на прямолінійних ділянках.

Розв'язання

Зауважимо, що під час рівномірного руху автоцистерни сила тиску на стінки цистерни є сталою. Найбільший тиск спостерігаємо поблизу дна цистерни. Його значення ρgh. Тиск зростає лінійно із збільшенням глибини, тому значення сили тиску F_1 на кожну грань цистерни

$$F_1 = \frac{1}{2}\rho g h^3 \qquad (1)$$

Під час гальмування та руху заокругленням спостерігаємо дію фіктивних сил інерції, пов'язані з неінерційністю системи відліку «автоцистерна». Модуль F_2 фіктивних сил інерції знаходимо з формули

$$F_2 = ma, \qquad (2)$$

де a – модуль прискорення, що діє на масу m в цистерні.
Таким чином, маса m діє на стінку із силою, що визначається з (2). Ця сила додається до модуля сили F_1 і створює загальну силу тиску на грань цистерни (прискорення $\boldsymbol{a}$ при гальмуванні або при русі коловим заокругленням перпендикулярне одній з граней цистерни).

$$m = \rho h^3. \qquad (3)$$

Отже, під час руху з прискоренням загальна сила, що діє на грань цистерни (передню або бічні) може бути знайдена з формули

$$F_{заг} = F_1 + F_2. \quad (4)$$

З (1)-(4) маємо

$$F_{заг} = \rho h^3(\frac{1}{2}g + a). \quad (5)$$

Для безпеки руху необхідно вимагати, щоб

$$F_{заг} < F_{гр}. \quad (6)$$

(5) разом із (6) дає

$$\rho h^3(\frac{1}{2}g + a) \leq F_{гр}. \quad (7)$$

При гальмуванні перед світлофором на прямолінійній ділянці шляху модуль прискорення a_1 можна знайти з виразу

$$a_1 = \frac{v^2}{2l}, \quad (8a)$$

а при рівномірному русі заокруглення модуль прискорення a_2 є

$$a_2 = \frac{v^2}{R_i}, \quad (8b)$$

де R_i – радіус і-го заокруглення.

Для виконання вимоги (7) прискорення а, знайдені з виразів (8a) та (8b) повинні бути такими, щоб для максимально дозволеного значення швидкості руху v_{max} не відбувся розрив цистерни.

За умовою $l \leq \frac{1}{2}(R_{max} - R_{min})$, тому з (8a) при русі з максимально дозволеною швидкістю маємо

$$a_1 \geq \frac{V_{max}^2}{Rmax - Rmin}. \quad (9)$$

Водночас, максимальне значення модуля прискорення a_2 при русі з максимально дозволеною швидкістю досягається при русі з мінімальним значенням радіуса заокруглення R_{min}:

$$a_{2max} = \frac{V_{max}^2}{R_{min}}. \quad (10)$$

За умовою найбільший радіус криволінійної ділянки R_{max} менш ніж в два рази більший за найменший радіус R_{min} заокруглення дороги, тому знаменник в (9) менший за знаменник у виразі (10), а, отже, відповідно й дріб у правій частині виразу (9) більший за дріб, що стоїть у правій частині виразу (10). Дійсно, нехай

$$R_{max} = 2\times R_{min} - \varepsilon \ (\varepsilon > 0).$$

Тоді

$$R_{max} - R_{min} = 2\times R_{min} - \varepsilon - R_{min} = R_{min} - \varepsilon < R_{min}.$$

Звідси приходимо до висновку про те, що

$$a_{1min} = \frac{V_{max}^2}{Rmax\ - Rmin} \quad (11)$$

за умов задачі завжди перевищує a_{2max}.

В (7) параметри ρ, h та g є сталими, змінним параметром є модуль прискорення a. Знайдемо його

$$a \leq \frac{F_{\text{гр}}}{\rho h^3} - \frac{g}{2.} \quad (12)$$

Якщо a_{1min} перевищить значення a з виразу (11), то відбудеться розрив цистерни. Отже, повинна виконуватись вимога

$$a_{1min} \leq a \leq \frac{F_{\text{гр}}}{\rho h^3} - \frac{g}{2.} \quad (13)$$

З (11) та (13) отримуємо

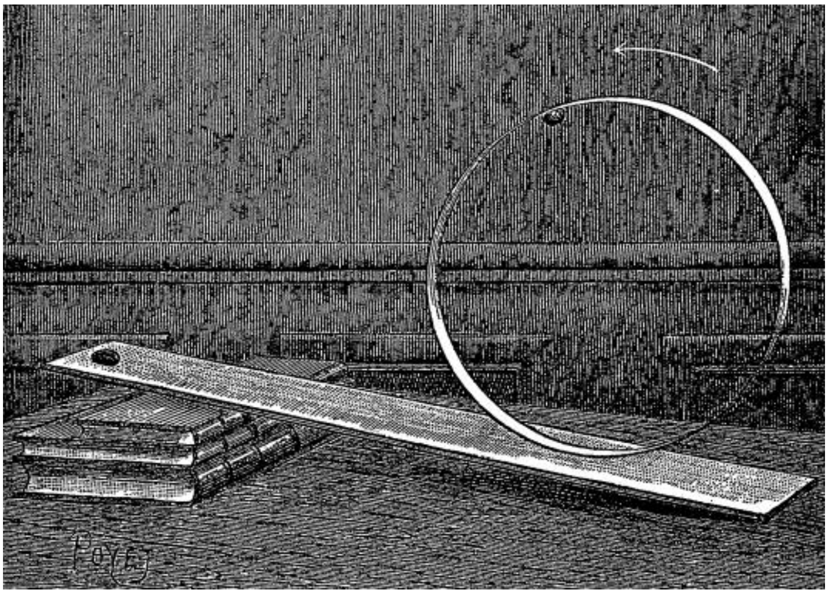
$$\frac{V_{max}^2}{Rmax\ - Rmin} \leq a \leq \frac{F_{\text{гр}}}{\rho h^3} - \frac{g}{2.},$$

звідси

$$V_{max} = \sqrt{\left(\frac{F_{\text{гр}}}{\rho h^3} - \frac{g}{2.}\right)(Rmax\ - Rmin)}. \quad (14)$$

Відповідь: $V_{max} = \sqrt{\left(\frac{F_{\text{гр}}}{\rho h^3} - \frac{g}{2.}\right)(Rmax\ - Rmin)}.$

4. <u>«Котимося вгору»</u>



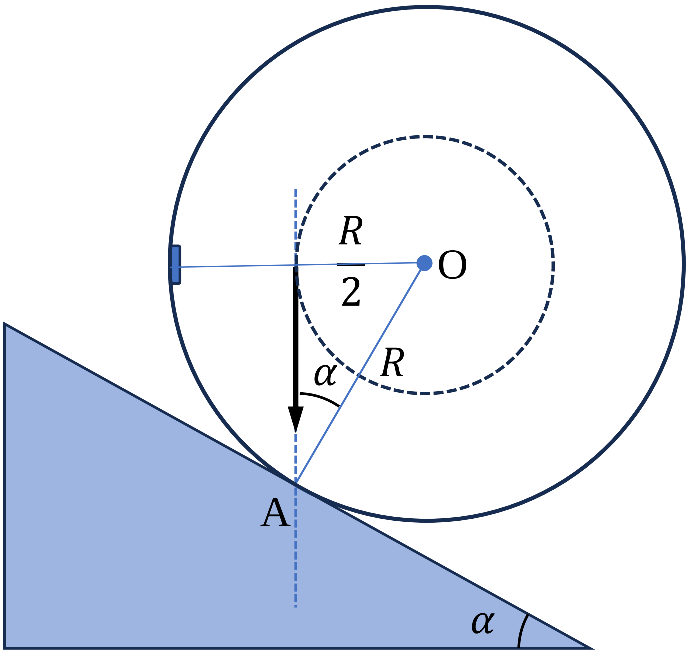
У всесвітньо відомій книжці «Наукові забави. Фізика: досліди, фокуси, розваги» Тім Тома пропонується зробити кільце з цупкого картону і зсередини прикріпити до нього монету чи просто шматочок пластиліну. Поставити кільце на похилу площину приблизно так, як зображено на рисунку, й обережно відпустити – кільце покотиться вгору.

А) Припустимо, що прикріплений тягарець має таку ж масу, як і паперове кільце, але його розмірами у порівнянні з розмірами кільця можна знехтувати. За якого **відношення висоти похилої площини до її довжини** кільце може покотитися вгору?
Б) Уявіть, що висота похилої площини вчетверо менша за її довжину, а кільце ставлять на неї також у напрямку підйому, але навмання відносно місця положення пластиліну.

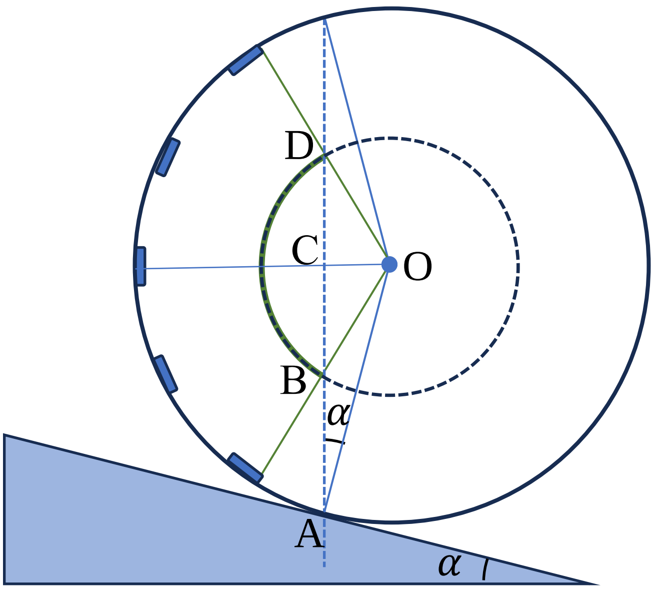
Яка **ймовірність** того, **що** воно **покотиться вгору**? (у якій частині випадків у середньому воно покотиться вгору).
В) Якої **найбільшої швидкості** може досягти кільце при цьому (див. п.Б), якщо вважати, що кільце не проковзує і не підстрибує? Радіус кільця ***R*** =15 см, опором повітря знехтувати.

Розв'язання.

А) Під час кочення вгору центр кільця піднімається, але тягарець опускається. Якщо при цьому загальна потенціальна енергія зменшуватиметься, а за рахунок сил тертя кільце не проковзуватиме, то воно рухатиметься вгору. Отже, задачу можна розв`язати

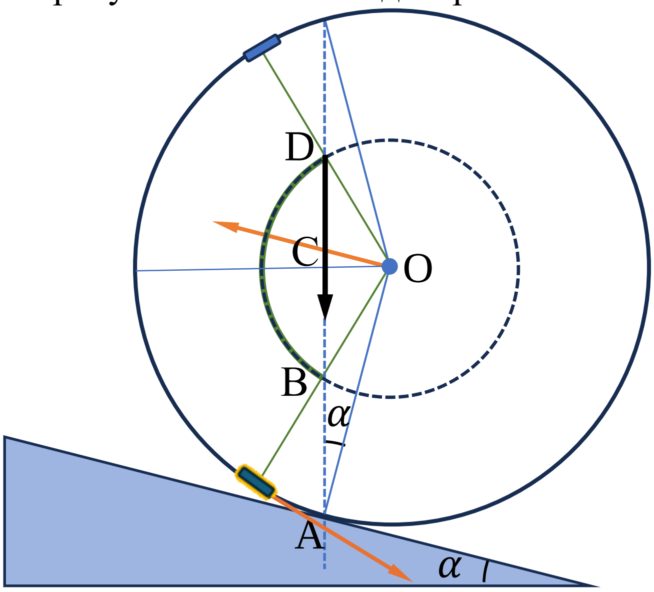


енергетично, знайшовши за якого положення потенціальна енергія кільця з тягарцем мінімальна. А можна розглянути моменти сил, наприклад відносно точки А (Рис.1), які для руху вгору мають обертати колесо проти годинникової стрілки. Оскільки маси тягарця й кільця однакові, центр мас системи знаходиться від центру кільця на половині радіусу. Лінія дії сумарної сили тяжіння прикладеної до центру мас має проходити лівіше точки А, щоб обертати кільце відносно неї проти годинникової стрілки. У граничному випадку ця лінія проходить через точку А, а радіус «центр кільця – тягарець» горизонтальний (Рис. 1). Катет навпроти кута удвічі менший за гіпотенузу, отже $\alpha = 30°$. **Кільце може покотитися вгору** за менших кутів нахилу, тобто, **коли відношення висоти похилої площини до її довжини менше ½.**



Б) Для відношення висоти похилої площини до її довжини як ¼, маємо сектор можливих положень центру мас системи у 120° (Рис. 2). Дійсно, CO дорівнює 1/4R (з подібності трикутника ACO з трикутником похилої площини), але ж CO є й катетом у трикутнику BCO, у якого гіпотенуза BO 1/2R, звідки кут OBC 30°, а кут BOD 120°, що складає третину від 360°. Отже, **якщо ставити кільце навмання** відносно місця положення пластиліну, **ймовірність** того, **що воно покотиться вгору складатиме 1/3**.

В) Для досягнення більшої швидкості поставимо кільце з тягарцем на площину у крайньому верхньому положенні тягарця, за якого кільце почне котитися вгору (положення з максимальною для цього випадку потенціальною енергією і центром мас системи у точці D, Рис.3). Поки центр мас перебуватиме зліва від вертикального пунктиру через точку A (дотику кільця і поверхні похилої площини), кільце розганятиметься і збільшуватиме свою швидкість. Отже максимальної швидкості воно досягне, повернувши на кут 120° і прокотившись відстань $2\pi R/3$, коли центр мас системи опиниться у точці B. Точка A переміститься вгору вздовж площини, піднявшись на висоту $\frac{2\pi R}{3}\sin\alpha$, де $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Тому у цей момент потенціальна енергія системи зменшиться на



$$2mg\left(\frac{R}{2}\sqrt{3} - \frac{2\pi R}{3}\sin\alpha\right) = mgR\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$

і настільки ж збільшиться кінетична енергія, оскільки за умовою втрати механічної енергії відсутні. Припустимо, центр кільця має у цей момент швидкість $\vec{v}$. Тоді швидкість тягарця відносно центру кільця має таку ж величину v, але утворює зі швидкістю $\vec{v}$ близький до 180° кут $150° + \alpha$ (див. Рис.3) Тому кінетична енергія тягарця відносно нерухомої системи відліку

$$E_т = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{8}mv^2 \approx 0{,}036mv^2$$

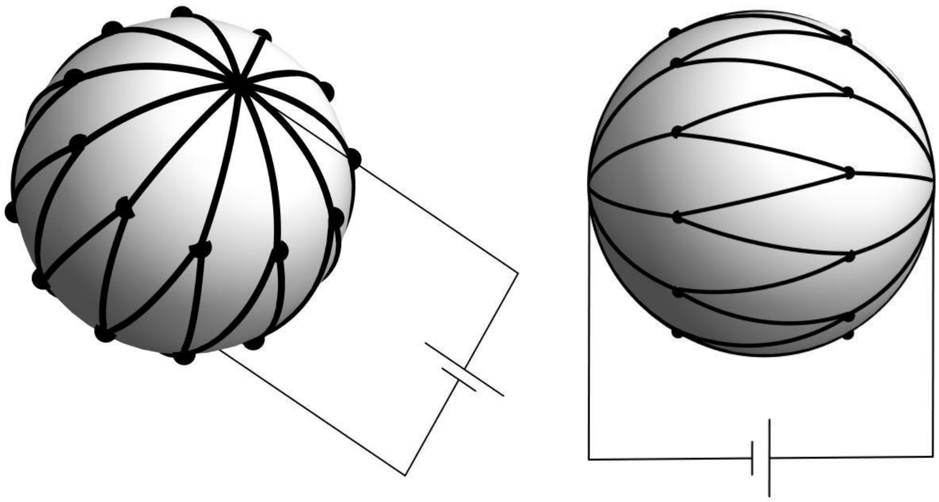
буде малою величиною, а кінетична енергія кільця (складається з поступальної енергії центру мас і обертальної навколо нього)

$$E_к = mv^2,$$

звідки, дорівнюючи загальну кінетичну енергію до зменшення потенціальної, знаходимо (для $g = 9{,}8$ м/с^2)

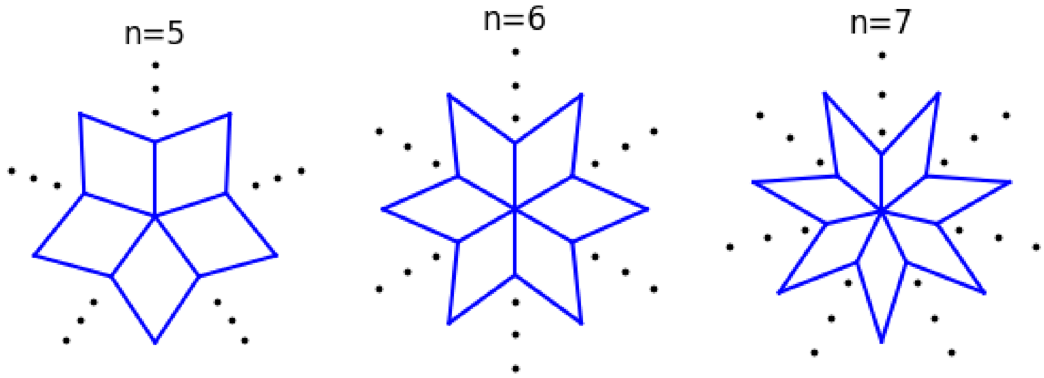
$$v = \sqrt{2gR\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{9}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + 1\right)} \approx 0{,}986\text{м/с} \approx 1\text{м/с}.$$

5. «Сферичний обігрівач»



Сашко хотів зробити обігрівач з кулі радіусом $\boldsymbol{R}$ = 10 см. Куля зроблена з ізолятору, який має дуже велику теплопровідність. Ідея Сашка полягає в тому, щоб наклеїти на сферу схему однакових дротів, як зображено на рисунку в двох різних ракурсах. Дроти зображені чорними лініями, місця спайки кульками. До полюсів цієї схеми Сашко хоче під'єднати батарею з напругою $\boldsymbol{U}$ = 5 В.

Ця схема задається числом $\boldsymbol{n}$ – кількістю дротів, що виходять з полюсів сфери. Різні можливі випадки, як виглядає полюс для різних n, зображені нижче.



Сашко може замовити в магазині набір з однакових дротів. Довжина дроту може бути довільною, її обирає замовник, а опір дроту на одиницю довжини дорівнює $\boldsymbol{\rho}$ = 1/15 Ом/см. З урахувань безпеки кулька не має розігріватись більш ніж до 80 градусів Цельсія. У кімнаті Сашка температура зазвичай 20 градусів. Уважаючи, що матеріал сфери має поверхневий коефіцієнт теплообміну з повітрям $\boldsymbol{\alpha}$ = 1.4 мВт/(см^2·^{o}С), знайти, **яке значення *n*** треба обрати Сашку для отримання максимальної потужності? Передачу тепла безпосередньо від дротів до повітря можна не враховувати.

Розв'язання

Нехай довжина одного резистора *L*, а опір – $r=\rho L$. Нехай через граничні резистори біжить струм *I*. Тоді в центральних резисторах струм ділиться навпіл, тобто дорівнює *I/2*. Звідси отримуємо

$$U = \left(I + \frac{I}{2} + I\right) r, \qquad I = \frac{2U}{5r}$$

З закону Джоуля-Ленца, повна потужність теплового випромінення дорівнює

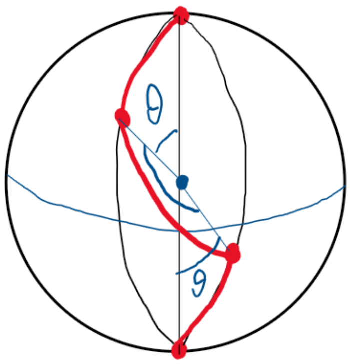
$$P = U \times nI = \frac{2n}{5}\frac{U^2}{r}$$

Щоб нагрівач не перенагрівся, його повна потужність має бути обмеженою. З рівняння теплових витрат:

$$P < \alpha \cdot 4\pi R^2 \cdot \Delta T, \qquad \Delta T = 80\text{C}^\circ - 20\text{C}^\circ = 60\text{C}^\circ$$

$$P < 1.4 \cdot 10^{-3} \cdot 4\pi \cdot 100 \cdot 60 \text{ Вт} = 106 \text{ Вт}$$

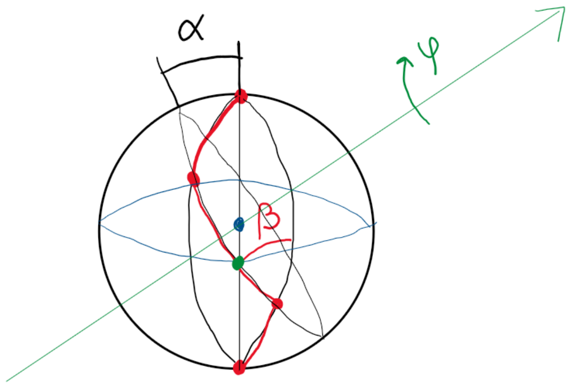
отримуємо максимально можливу потужність 106 Вт.



Переходимо до цікавої частини: знаходження *r*. Побудуємо один шлях між полюсами сфери:

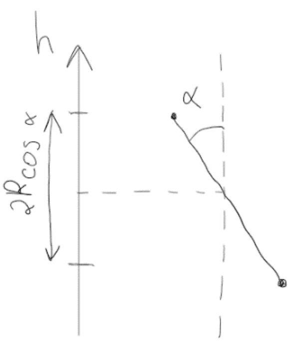
Цей шлях складається з трьох сегментів, кожен з яких покриває однаковий кут $\theta = L/R$. Нам треба знайти цей кут. Уявимо, що це Земля, а ми рухаємось по неї з південного полюсу до північного. Тоді рух по першому та третьому сегменту відбувається строго на північ з 90° до 90°-θ південної довготи та з 90°-θ до 90° північної довготи відповідно. В центральному сегменті ми рухаємось не на північ, тому наближаємося до полюса ми повільніше, зсунувшись лише на деяку довготу $\theta_2 < \theta$.
Рівняння на кут тоді має вигляд

$$2\theta + \theta_2 = \pi$$



Тут, нам все ще треба виразити θ_2 через геометрію нашої траєкторії.

Нам треба визначити кут β – кут, на який ми повернулись на сегменті 2 замість того, щоб іти на північ. Згадуючи про сітку з ромбів, ми отримуємо, що $\beta = \pi/n$. Інші два необхідні кути – це кут α та φ. Кут α – це кут між двома колами: вертикальним, що проходить між полюсами та нашим положенням на екваторі, та похиленим, якому належить центральний сегмент. Кут φ – це кут «широти» відносно вісі обертання, пов'язаної з похилим колом. Визначимо кут φ таким чином, що в точці перетину екватора він дорівнював нулю. Тоді сегмент 2 відповідає інтервалу φ ∈ [-θ/2, θ/2].



Рівномірний рух по колу – це коливання. Спроектуємо похиле коло на вертикальну площину, як зображено на малюнку:

$$h(\phi) = R\cos\alpha\sin\phi$$

Для більш прозорої аналогії, уявимо, що ми рухаємось з якоюсь швидкістю *v*. Тоді φ=*vt/R*, і кутова частота коливань ω=*v/R*.
На початку та кінці сегменту 2, висота дорівнює h=±R sin θ_2/2. Отже

$$R\sin\frac{\theta_2}{2} = R\cos\alpha\sin\frac{\theta}{2}$$

Для повної системи рівнянь, треба виразити α. Для цього ми знову уявимо, що ми мандрівники і рухаємось зі швидкістю *v*. На сегменті 1 ми рухались на північ. Наша вертикальна швидкість одразу перед поворотом була $v\sin\theta$, а одразу після повороту – $v\sin\theta\cos\beta$. З іншого боку, для коливань швидкість буде

$$h = R\cos\alpha\sin\omega t$$

$$v_h = R\cos\alpha\cdot\omega\sin\omega t$$

Підставляючи всі інгредієнти:

$$R\cos\alpha\frac{v}{R}\cos\frac{\theta}{2} = v\sin\theta\cos\beta$$

$$\cos\alpha = \frac{\sin\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}\cos\beta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\beta$$

Тепер ми можемо знайти θ_2

$$\sin\frac{\theta_2}{2} = 2\cos\beta\sin^2\frac{\theta}{2} = \cos\beta(1-\cos\theta)$$

$$\theta_2 = 2\arcsin[\cos\beta(1-\cos\theta)]$$

З нього ми можемо отримати кінцеве рівняння на θ

$$2\theta + 2\arcsin[\cos\beta(1-\cos\theta)] = \pi$$

$$\cos\beta(1-\cos\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$\cos\beta = \cos\theta(1+\cos\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{\cos\beta}{1+\cos\beta}$$

Звідси ми нарешті можемо виразити опір одного ребра *r* та кінцеву потужність теплового випромінення:

$$\boxed{P = \frac{2U^2}{5\rho R}\frac{n}{\arccos[\frac{\cos(\pi/n)}{1+\cos(\pi/n)}]} = \frac{2U^2}{5\rho R}f(n)}$$

Підставляючи числа, отримуємо *P* = 15 Вт *f(n)*. Значення:

n	4	5	6	7	8
f(n)	3.50	4.52	5.51	6.50	7.47
P	52.5	67.7	82.7	97.5	112

З урахуванням обмеження на 106 Вт, фінальна відповідь: **треба взяти *n=7***

Задачі запропонували: 1. Гельфгат І.М., 2. Рідкокаша І.П., 3. Шевчук О.Г., 4. Орлянський О.Ю., 5. Микуленко О.І.