

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Український фізико-математичний ліцей Київського національного
університету імені Тараса Шевченка
XXIV Всеукраїнська учнівська Інтернет-олімпіада з фізики
2024/2025 навчального року
I (заочний) етап II тур
11 клас

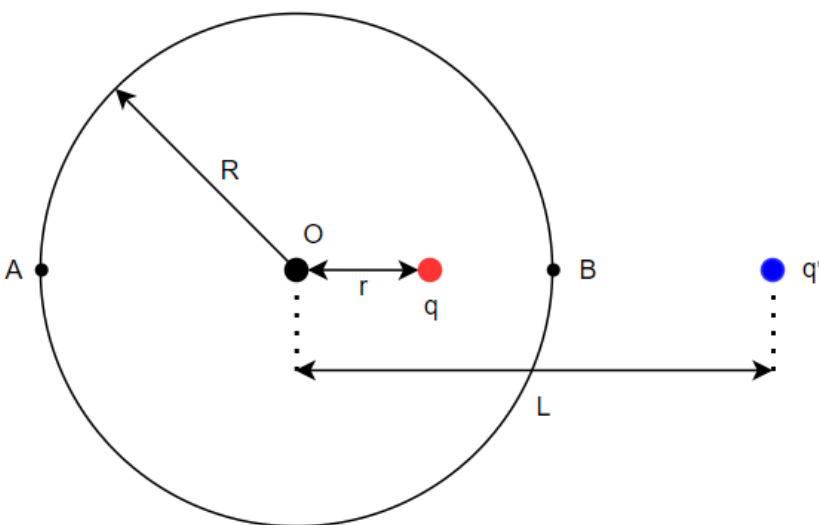
1. «Поневолений заряд»

Усередину тонкої металевої сфери радіуса R , повний заряд якої рівний Q , та яка віддалена від всіх інших об'єктів, поміщено точковий заряд q на відстань r ($0 < r < R$) від центру сфери. Маса заряду m , маса сфери M .

- А) **Опишіть розподіл** електричного поля за межами сфери та знайдіть її потенціал.
Б) Знайдіть відносне **прискорення**, з яким в даному положенні рухаються заряд та сфера.

Розв'язання

А) В товщі металу сфери поля не повинно бути, отже наведений на внутрішній поверхні заряд розподілиться так, щоб повністю компенсувати поле заряду у сфері. Цей заряд на внутрішній поверхні сфери буде рівний $-q$. На зовнішній поверхні заряд буде $q+Q$ для того щоб повний заряд на сфері був Q . Більше того, заряд на зовнішній поверхні буде розподілений рівномірно, адже внутрішні заряди повністю компенсували свою дію. Це означає, що потенціал сфери відносно нескінченності буде рівний $k \frac{q+Q}{R}$, а поле поза сферою буде таке, як від заряду $q+Q$, який поміщений в центр сфери.



- Б) Скористаємося методом зображень. Ми знаємо, що потенціал сфери рівний $k \frac{q+Q}{R}$ проте спочатку підберемо такий уявний заряд-зображення, щоб він разом із реальним зарядом q давав нульовий потенціал в будь-якій точці сфери. Це відома задача і її

розв'язок дає такі параметри для величини та положення заряду-зображення (можете перевірити це для найпростіших точок А та В):

$$q' = -q \frac{L}{R}$$

$$L = \frac{R^2}{r}$$

Цей заряд-зображення імітує дію всередині сфери від зарядів, що наведені на внутрішній частині сфери. Проте, як ми знаємо, потенціал сфери не нуль, отже має бути ще десь заряд, який надасть їй цей потенціал. В центрі сфери він перебувати не може, адже заряди зображення всі мають бути з іншого боку від реального заряду. Тоді з фізичних міркувань легко зрозуміти, що цей заряд $q+Q$ там же, де і реальний – рівномірно розмазаний на зовнішній поверхні сфери. Цей заряд не створює поля всередині сфери, а отже не впливає на заряд q . Тоді єдина сила, яка діє на заряд q – від заряду зображення q' і це сила притягання до найближчої точки сфери.

$$F = \left| k \frac{qq'}{(L-r)^2} \right| = k \frac{q^2 \frac{R}{r}}{\left(\frac{R^2}{r} - r\right)^2}$$

Тоді прискорення заряду $a_z = \frac{F}{m}$, а сфери $a_{сф} = \frac{F}{M}$.

Тоді відносне прискорення зближення сфери та заряду

$$a = a_z + a_{сф} = k \frac{q^2 \frac{R}{r}}{\left(\frac{R^2}{r} - r\right)^2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right).$$

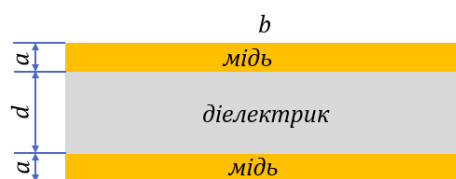
2. Індуктивність

Визначте індуктивність двох систем завдовжки l , поперечні перерізи яких показані на рисунку: А) двосмугової електричної шини ($a \ll d \ll b$); Б) коаксіального кабелю.

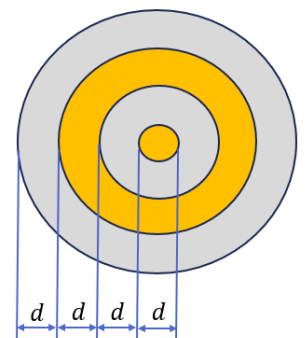
Вказівки.

1) *Магнітна проникність*

усіх застосованих матеріалів дорівнює одиниці, а струм розподіляється по перерізу провідників рівномірно.



Шина



Кабель

2) В обох пунктах можна вважати, що магнітне поле струму зосереджене всередині системи (практично не виходить назовні).

3) Для визначення магнітного поля радимо скористатися законом повного струму (теоремою про циркуляцію магнітного поля).

Розв'язання

У обох випадках можна вважати, що магнітне поле струму зосереджене всередині системи (практично не виходить назовні).

А) Припустимо, струм у верхньому провіднику шини тече на нас, а в нижньому — від нас. Скористаємося законом повного струму (теоремою про циркуляцію магнітного поля), щоб окремо визначити магнітне поле верхнього $B_{\text{верх}}$ та нижнього $B_{\text{ниж}}$ струмів. Для цього візьмемо замкнутий контур у формі прямокутника, центр якого збігається з центром $O_{\text{верх}}$ верхнього провідника. Отримаємо: верхній струм утворює над собою магнітне поле, напрямлене горизонтально ліворуч, а під собою горизонтальне магнітне поле, напрямлене горизонтально праворуч. Індукція поля $B_1 = \mu_0 \frac{I}{2b}$. У точках, що лежать усередині верхнього провідника, індукція магнітного поля лінійно залежить від різниці висот y даної точки та точки $O_{\text{верх}}$: $B_2(y) = B_1 \frac{2y}{a}$. Вище від $O_{\text{верх}}$ поле напрямлене ліворуч, а нижче — праворуч.

Для поля $B_{\text{ниж}}$ виконуються аналогічні закономірності, але напрям поля слід змінити на протилежний.

Додавши за принципом суперпозиції магнітні поля обох провідників, доходимо висновку: за межами шини поля компенсують одне одного, а в діелектрику підсилюють, утворюючи однорідне горизонтальне магнітне поле з індукцією $2B_1$, напрямлене праворуч. Усередині провідників поле лінійно спадає від $2B_1$ на внутрішній поверхні до нуля на зовнішній.

Щоб отримати індуктивність, можна знайти повну енергію W магнітного поля, проінтегрувавши густину енергії $w = \frac{B^2}{2\mu_0}$ по об'єму шини (діелектрику та двом провідникам). Отримаємо $W = \frac{2B_1^2}{\mu_0} bl \left(d + \frac{2a}{3} \right) = \frac{\mu_0 I^2 l}{2b} \left(d + \frac{2a}{3} \right)$. Оскільки $W = \frac{LI^2}{2}$, індуктивність шини $L = \frac{\mu_0 l}{b} \left(d + \frac{2a}{3} \right)$. Звернімо увагу, що індуктивність зменшується зі збільшенням ширини шини.

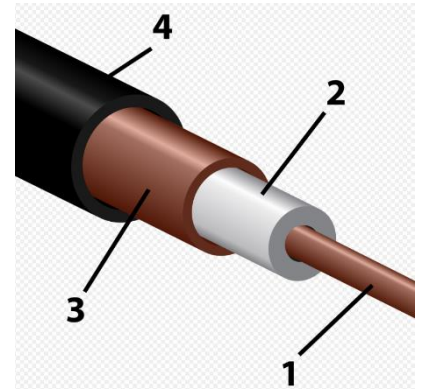
Б) Розглянемо тепер коаксіальний кабель. Застосовуючи знов-таки закон повного струму, отримуємо залежність індукції магнітного поля від відстані r до осі кабелю:

$$B = \mu_0 \frac{2I}{\pi d^2} r, \text{ якщо } r < \frac{d}{2};$$

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}, \text{ якщо } \frac{d}{2} < r < \frac{3d}{2};$$

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \left(\frac{25}{16} - \frac{r^2}{4d^2} \right), \text{ якщо } \frac{3d}{2} < r < \frac{5d}{2};$$

$$B = 0, \text{ якщо } r > \frac{5d}{2}.$$



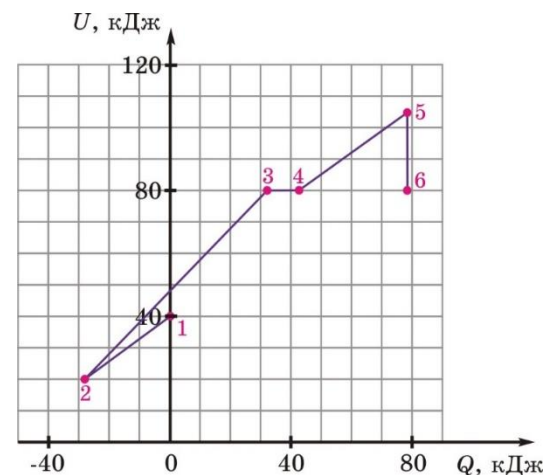
Повну енергію W магнітного поля визначимо інтегруванням густини енергії $w = \frac{B^2}{2\mu_0}$ по об'єму: $W = \frac{\pi l}{\mu_0} \int_0^{5d/2} B^2 r dr$. Провівши інтегрування по трьох інтервалах значень r , отримуємо:

$$W = \frac{\mu_0 I^2}{\pi} \left(\frac{1}{16} + \frac{\ln 3}{4} + \frac{625}{1024} \ln \frac{5}{3} - \frac{33}{128} \right) = \frac{\mu_0 I^2}{1024\pi} (625 \ln 5 - 369 \ln 3 - 200).$$

Або: $W \approx 0,1245 \mu_0 I^2 l$, що дає $L \approx 0,25 \mu_0 l$.

3. «Термодинамічна карта»

На рисунку наведений графік процесу з ідеальним газом (розрідженим вуглекислим газом) у координатах U, Q (тут U — внутрішня енергія газу, Q — отримана газом кількість теплоти). Накресліть графік цього процесу в координатах p, V (p — тиск газу, V — його об'єм). Дотримуйтесь правильного співвідношення між координатами характерних точок. Опишіть характер кожного з етапів процесу.



Підказка 1. Існують газові процеси, які називають політропними — це процеси, під час яких теплоємність C газу є сталою. Для таких процесів виконується рівняння $pV^n = const$, де $n = \frac{C_p - C}{C_V - C}$.

Підказка 2 (в першу чергу для тих, хто працює на маленькому екрані). Координати точок на графіку (надані в кДж): точка 1 (0; 40), точка 2 (-28; 20), точка 3 (32; 80), точка 4 (43; 80), точка 5 (78; 105), точка 6 (78; 80).

Розв'язання

Перш за все звернімо увагу: всі ділянки наведеного графіка — відрізки прямих. Скористаємося також співвідношеннями $\Delta U = \nu C_V \Delta T, Q = \nu C \Delta T$. Тут C — молярна теплоємність газу під час певного етапу процесу, C_V — молярна теплоємність газу під час ізохорного процесу. Оскільки для кожної прямолінійної ділянки маємо $\frac{Q}{\Delta U} = \frac{C}{C_V} = const$, на кожному етапі процесу

теплоємність газу є незмінною. Такі процеси називають політропними, для них виконується рівняння $pV^n = \text{const}$, де $n = \frac{C_p - C}{C_V - C}$. Окремими випадками політропного процесу є всі ізопроцеси та адіабатний процес. Розглянемо тепер різні етапи процесу.

Відомо, що молекули вуглекислого газу CO_2 є лінійними, тому мають стільки ж ступенів свободи, скільки двохатомні молекули. Отже, молярні теплоємності $C_V = \frac{5}{2}R$, $C_p = \frac{7}{2}R$, а $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = 1,4$.

Етап 1–2: $Q = -28$ кДж, $\Delta U = -20$ кДж, тобто $\frac{Q}{\Delta U} = \frac{C}{C_V} = 1,4$. Інакше кажучи, $C = C_p$. На етапі 1–2 відбувається **ізобарне** охолодження (і, відповідно, стискання) газу. Абсолютна температура та об'єм газу зменшилися вдвічі ($T_2 = T_1/2$). Зазначимо, що $U_1 = \frac{5}{2} \nu RT_1 = 40$ кДж, звідки $\nu RT_1 = 16$ кДж.

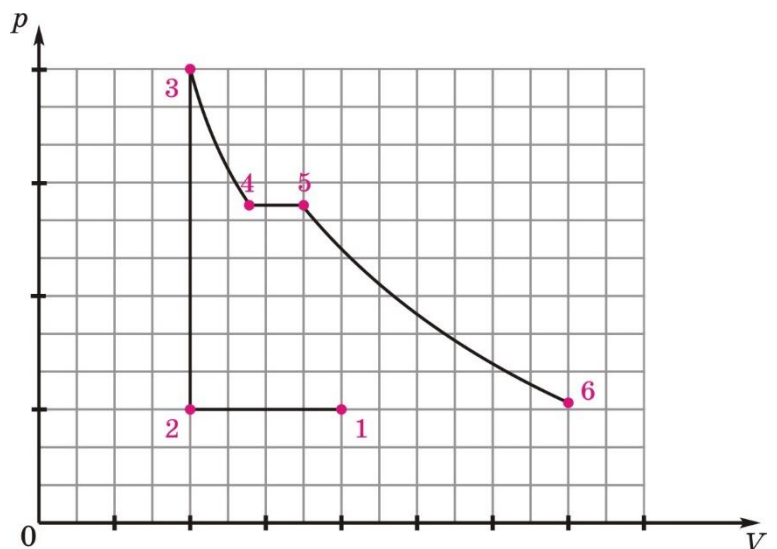
Етап 2–3: $Q = 60$ кДж, $\Delta U = 60$ кДж, тобто $Q = \Delta U, C = C_V$. Тут відбувається **ізохорне** нагрівання газу. Абсолютна температура збільшилася в 4 рази, $T_3 = 2T_1$.

Етап 3–4: $Q = 11$ кДж, $\Delta U = 0$. Це **ізотермічний** процес, Q дорівнює роботі газу: $Q = \int_{V_3}^{V_4} p \cdot dV = \nu RT_3 \int_{V_3}^{V_4} \frac{dV}{V} = 2\nu RT_1 \ln \frac{V_4}{V_3}$. Звідси випливає співвідношення $V_4 = 1,4V_3$.

Етап 4–5: $Q = 35$ кДж, $\Delta U = 25$ кДж, тобто (як і на етапі 1–2) $Q = 1,4\Delta U, C = 1,4C_V$. Отже, і на цьому етапі процес є **ізобарним** (це ізобарне нагрівання з відповідним розширенням). Абсолютна температура та об'єм газу збільшилися в 1,31 разу, відповідно до $T_5 = 2,62 T_1$ і $V_5 = 1,84 V_2$.

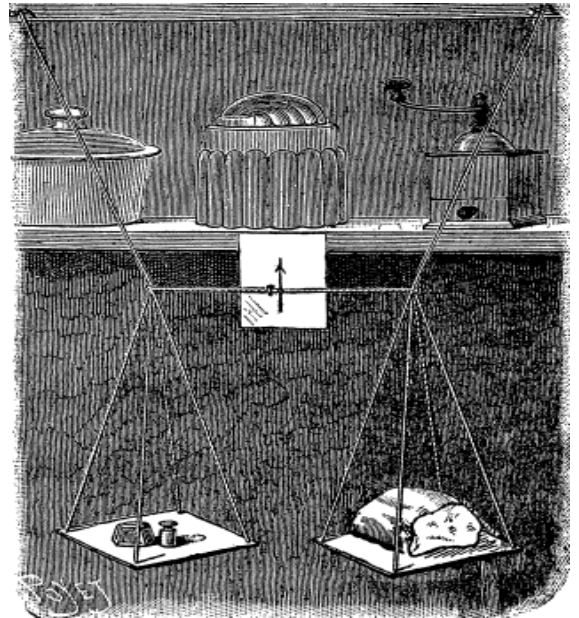
Етап 5–6: $Q = 0, \Delta U = -25$ кДж. Це **адіабатний** процес. Очевидно, $\frac{T_6}{T_5} = \frac{U_6}{U_5} = 0,76$. Згідно рівнянню адіабатного процесу $pV^{1,4} = \text{const}$ або $TV^{0,4} = \text{const}$. Звідси $V_6 \approx 1,8V_1$, відповідно $p_6 \approx 1,1p_1$.

Графік процесу в координатах p, V наведений нижче. Як бачимо, процес не є циклічним, графік не замикається.



4. «Терези Тараса».

У всесвітньо відомій книжці Тім Тома «Наукові забави. Фізика: досліди, фокуси, розваги» пропонується зробити терези з нитки, кінці якої прикріпити на однаковій висоті, а однакові шальки терезів підвісити симетрично (див. Рис.). Пропонується під час зважування врівноважувати тіло тягарцями. Тарас зробив вдома такі терези з міцної нитки і вирішив перевірити масу великого батону хлібу. Всі тягарці, які йому вдалося знайти вдома (загальною масою 183 г), Тарас поклав на ліву шальку терезів, а хліб на праву, але той все



одно переважив і нахилив середню «горизонтальну» частину нитки на 30° . При цьому ліва частина нитки нахилилася до горизонту на кут 45° до горизонту, а права на 60° .

А) Нехтуючи масою шальок, знайдіть масу батону.

Б) Тарас обережно змістив групу тягарців на 5 см вздовж діагоналі квадрату який утворюють точки прикріплення ниток до шальки, від чого основа лівої шальки нахилилася на кут 10° . Знайдіть масу шальки й уточніть масу батону. Довжина кожної з чотирьох ниток, прикріплених до шальки у кутах квадрату (з діагоналлю 20 см), дорівнює 26 см.

В) Уявіть, що маси шальок з навантаженням зосереджені у місцях їх приєднання до основної нитки у вигляді точкових тіл, і цим тілам надали електричні заряди q_1 і q_2 . За якого добутку зарядів $q_1 q_2$ період малих коливань у вертикальній площині нитки не залежатиме від зарядів? Чому цей період дорівнюватиме? Довжина середньої частини нитки 50 см. Прискорення вільного падіння $9,8 \text{ м/с}^2$.

Розв'язання.

А) Позначимо довжину середньої частини нитки через l , а довжину бокової через L . Тоді з $L \sin \alpha + l \sin \gamma = L \sin \beta$ знаходимо $\frac{l}{L} = \sqrt{3} + \sqrt{2} \approx 3,146$.

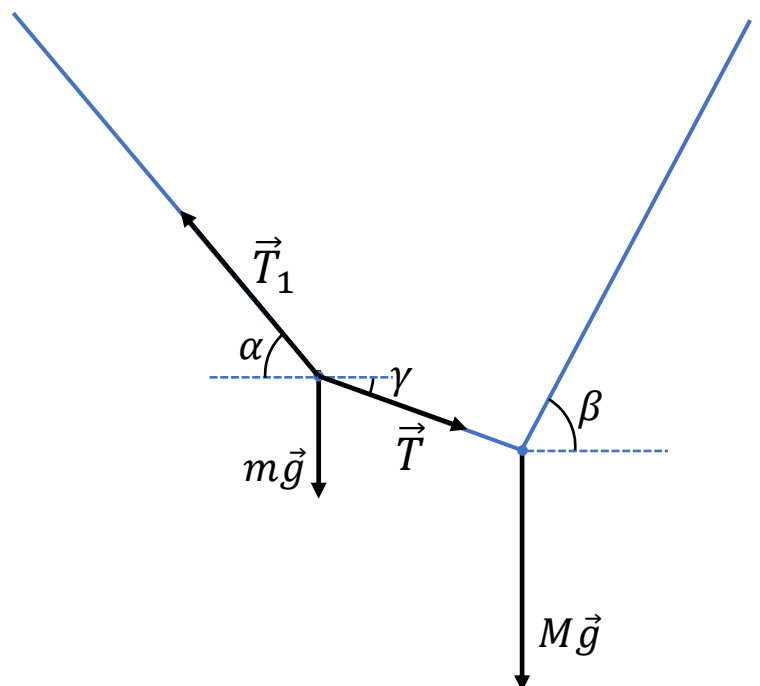
Для першого вузла знаходимо

$$\begin{cases} T_1 \sin \alpha = mg + T \sin \gamma, \\ T_1 \cos \alpha = T \cos \gamma, \end{cases}$$

звідки $mg = T \cos \gamma (t \alpha - t \gamma)$.

Аналогічно для другого вузла

$$Mg = T \cos \gamma (t \alpha + t \beta).$$



Отже

$$\frac{M}{m} = \frac{tg\beta + tg\alpha}{tg\alpha - tg\gamma} = 2(\sqrt{3} + 1)$$

і маса батону $M = 2(\sqrt{3} + 1)m \approx 1000$ г.

Б) Чотири нитки і квадрат шальки між точками кріплення ниток утворюють піраміду з ребром 26 см і висотою (за т. Піфагора $\sqrt{26^2 - 10^2} = 24$) $h = 24$ см. Після зміщення тягарців на $x = 5$ см, центр ваги навантаженої шальки змістився відносно центру квадратної основи на відстань $htg\delta \approx 4,23$ см. З умови рівноваги (вимушено нехтуємо висотою тягарців у порівнянні з h) знаходимо масу шальки: $m_{ш} = m \frac{x - htg\delta}{htg\delta} \approx 33,2$ г.

Тепер відношення мас слід переписати у вигляді:

$$\frac{M_6 + m_{ш}}{m_r + m_{ш}} = 2(\sqrt{3} + 1),$$

Звідки знаходимо $M_6 \approx 1148$ г. Батон виявився нестандартної маси.

В) Зауважимо, що за натягнутої нитки між тілами, їхня потенціальна енергія під час коливань не змінюватиметься, і тому на відповідь не впливатиме. Для знаходження періоду коливань запишемо вираз для повної механічної енергії. Кінетична енергія системи

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2},$$

Потенціальна енергія відносно рівня підвісу

$$U = -mgL\sin\alpha - MgL\sin\beta,$$

де кут β пов'язаний з α геометрією задачі. Використовуємо такі ж позначення для кутів, хоча вони при малих коливаннях трохи відрізняться від рівноважних $\alpha_0 = 45^\circ$ і $\beta_0 = 60^\circ$. Рівноважне положення відповідає мінімуму потенціальної енергії. Отже, похідна від потенціальної енергії, наприклад, по куту α має дорівнювати в точці мінімуму 0:

$$-mgL\cos\alpha - MgL\cos\beta \frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

звідки

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = -\frac{M\cos\beta}{m\cos\alpha} = -(\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

Таким за модулем буде і відношення швидкостей при малих коливаннях поблизу рівноважних кутів. Оскільки маси рухаються вздовж кіл однакових радіусів L ,

$$\frac{v}{V} = \frac{L |d\alpha/dt|}{L |d\beta/dt|} = \left| \frac{d\alpha}{d\beta} \right| = \sqrt{6} + \sqrt{2}.$$

Зазначимо, що це відношення можна було отримати й інакше, наприклад, з кінематики зв'язку через однаковість проекції швидкостей на напрям натягнутої середньої нитки довжиною l (див. Рис.):

$$v \sin(\alpha - \gamma) = V \sin(\beta + \gamma).$$

Запишемо повну енергію системи:

$$\begin{aligned} E &= \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2} - mgL \sin\alpha - MgL \sin\beta = \\ &= \frac{mL^2 \dot{\alpha}^2}{2} + \frac{ML^2 \dot{\beta}^2}{2} - mgL \sin(\alpha_0 + \Delta\alpha) - MgL \sin(\beta_0 + \Delta\beta) = \\ &= \frac{mL^2 \Delta\dot{\alpha}^2}{2} + \frac{ML^2 \Delta\dot{\beta}^2}{2} - mgL \sin\alpha_0 \cos\Delta\alpha - MgL \sin\beta_0 \cos\Delta\beta. \end{aligned}$$

Продиференціюємо за часом і врахуємо малість коливань:

$$\Delta\dot{\beta} [L^2 (m(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 + M) \Delta\ddot{\beta} + gL (m(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 \sin\alpha_0 + M \sin\beta_0) \Delta\beta] = 0.$$

Тривіальний розв'язок відсутності коливань дає $\Delta\dot{\beta} = 0$. Нульове значення виразу в дужках відповідає рівнянню гармонічних коливань відносно $\Delta\beta$:

$$\Delta\ddot{\beta} + \frac{g}{L} \frac{m(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 \sin\alpha_0 + M \sin\beta_0}{m(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 + M} \Delta\beta = 0.$$

звідки період малих коливань

$$T_{\text{мал.кол.}} = 2\pi \sqrt{2 \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + 2) l}{\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2}} \frac{1}{g}} \approx 2,9 \text{ с.}$$

Цей період не залежить від зарядів тіл доки нитка довжиною l натягнута. Сила кулонівської взаємодії з'єднаних ниткою зарядів компенсується величиною сили натягу нитки, а під час такого руху потенціальна енергія кулонівської взаємодії не змінюється. Крайній випадок станеться, по-перше, коли заряди тіл протилежного знаку і, по-друге, якщо сила кулонівського притягіння дорівнюватиме за модулем силі натягу нитки, що з'єднує тіла, коли ті не заряджені. Силу натягу цієї нитки T легко знайти з системи, наведеної на початку розв'язку

$$\begin{cases} T_1 \sin\alpha = mg + T \sin\gamma, \\ T_1 \cos\alpha = T \cos\gamma, \end{cases}$$

звідки

$$T = \frac{mg}{\cos\gamma(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\gamma)} = (\sqrt{3} + 1)mg.$$

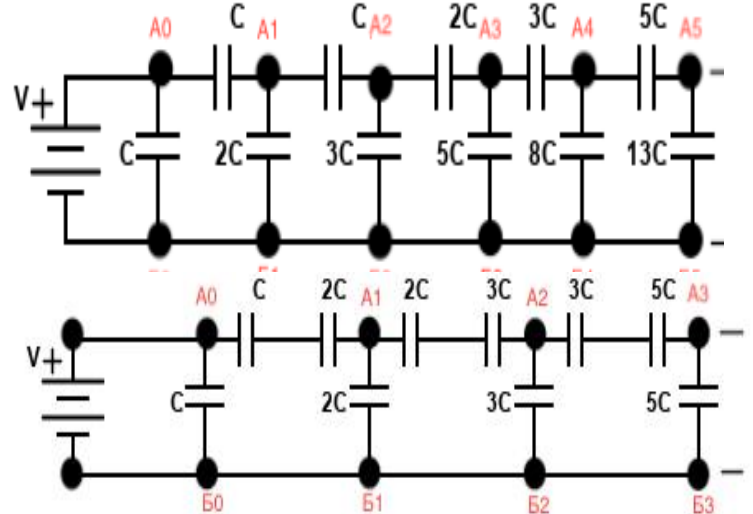
Отже, нитка не провисатиме за малих коливань, якщо

$$-\frac{kq_1q_2}{l^2} < (\sqrt{3} + 1)mg,$$

або добуток зарядів має перевищувати $q_1q_2 > -(\sqrt{3} + 1)\frac{mgl^2}{k} = -1,36 \cdot 10^{-10}\text{Кл}^2$ аж до розриву нитки у випадку однойменних зарядів. Якщо до m додати масу шальки $m_{\text{ш}} \approx 33,2$ г, тоді $q_1q_2 > -1,6 \cdot 10^{-10}\text{Кл}^2$.

5. «Коло конденсаторів від Фібоначчі»

На рисунку зображене нескінченне коло з конденсаторів. Ємності конденсаторів між точками A_iA_{i+1} та A_iB_i мають вам нагадати числовий ряд Фібоначчі. Відомо, що ємність кола дорівнює $\alpha \cdot C$, де α - відомий коефіцієнт, C - ємність першого конденсатора. Замінімо кожен з конденсаторів між точками A_iA_{i+1} на два з'єднаних послідовно конденсатори, ємності яких дорівнюють наступним двом за значенням числам в ряду Фібоначчі (див. рис.). Спробуйте якомога точніше знайти ємність нової схеми у вигляді $C_\infty = f(\alpha) \cdot C$.



Розв'язання

Аналогічно до розв'язку задачі №5 10 класу можна вивести перетворення «трикутника» в «зірку» для конденсаторів. Вводячи аналогічні індексні позначення, враховуючи правила послідовного та паралельного з'єднання конденсаторів, а також розглядаючи кожену пару вузлів можна отримати наступну систему рівнянь:

$$\sigma = C_{12} \cdot C_{23} + C_{23} \cdot C_{13} + C_{13} \cdot C_{12}$$

$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_{13} + C_{23}}{\sigma}$$

$$\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{C_{12} + C_{13}}{\sigma}$$

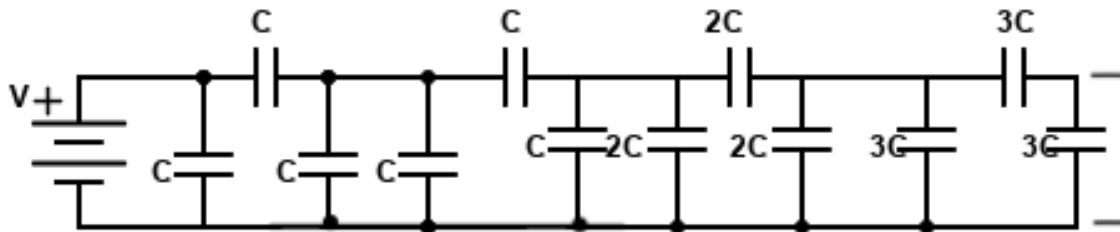
$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} = \frac{C_{12} + C_{23}}{\sigma}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь відносно ємностей C_1 , C_2 і C_3 отримаємо формули для перетворення «трикутника» в «зірку» :

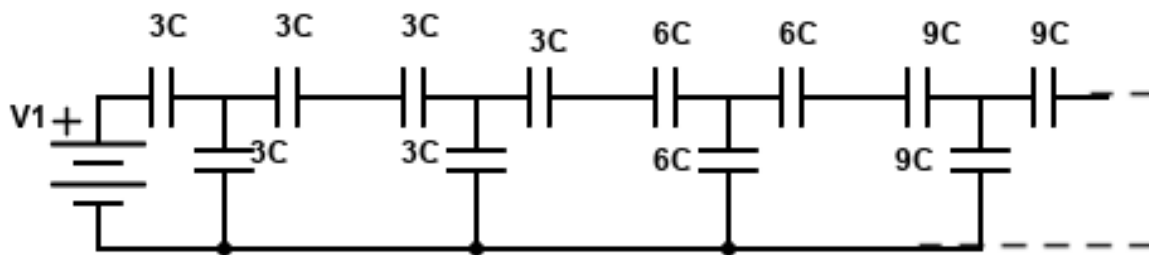
$$C_1 = \frac{\sigma}{C_{23}}; C_2 = \frac{\sigma}{C_{13}}; C_3 = \frac{\sigma}{C_{12}}$$

Тепер перейдемо до вирішення задачі:

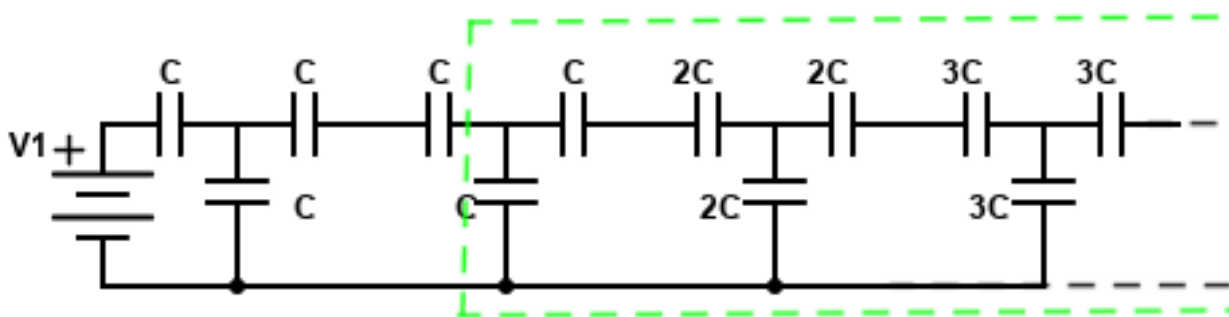
Розіб'ємо кожен конденсатор окрім нульового між точками $A_i B_i$ на два паралельно з'єднаних попередні два за значенням в ряду Фібоначчі та об'єднаємо усі конденсатори у трикутники як показано на рисунку:



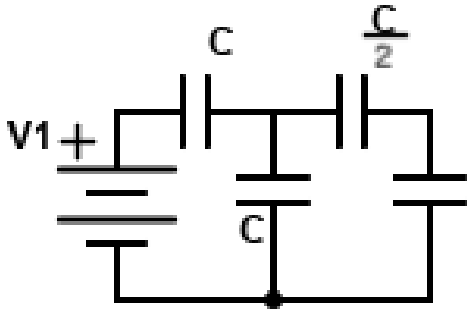
Після цього застосуємо перетворення «трикутника» в «зірку» для кожного трикутника:



Тепер можна побачити що усі елементи ланцюга кратні 3, а отже можна привести ланцюг до наступного вигляду з загальною ємністю $\frac{\alpha C}{3}$:



Тепер можна легко помітити що усе що знаходиться правіше зеленої лінії і є шукане значення $f(\alpha)C$. Тепер замінимо усе що знаходиться в зеленому квадраті на конденсатор ємністю $f(\alpha)C$. Таким чином отримуємо наступне коло:



Не забуваючи врахувати що загальна ємність кола дорівнює $\frac{\alpha C}{3}$ отримуємо наступне співвідношення:

$$\frac{\alpha}{3} C = \frac{C \left(C + \frac{f(\alpha) C \cdot \frac{C}{2}}{f(\alpha) C + \frac{C}{2}} \right)}{2C + \frac{f(\alpha) C \cdot \frac{C}{2}}{f(\alpha) C + \frac{C}{2}}}$$

Нарешті, після нескладних підрахунків отримуємо точне значення для $f(\alpha)$:

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha - 3}{9 - 5\alpha}$$

Задачі запропонували: 1.Олійник А.О. 2-3. Гельфгат І.М. 4. Орлянський О.Ю. 5. Абдулханов А.М.