

Міністерство освіти і науки України

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Український фізико-математичний ліцей Київського національного університету імені Тараса Шевченка

XXIV Всеукраїнська учнівська Інтернет-олімпіада з фізики

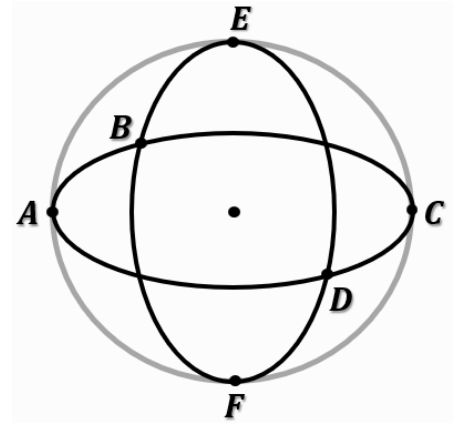
2024/2025 навчального року

I (заочний) етап I тур

9 клас

1. «Закільцьовані»

Три металеві обручі однакового діаметру та однакової товщини, що розташовані у взаємно перпендикулярних площинах, з'єднані між собою в усіх зазначених на рисунку точках. Два з трьох обручів (на рисунку вони показані чорними) зроблені з металу А, третій обруч (на рисунку він сірий) — з металу Б. Омметр, приєднаний до точок з'єднання А і С, показав опір $R_{AC} = 16$ Ом, а приєднаний до точок А і Е — опір $R_{AE} = 13$ Ом. Визначте відношення ρ_A/ρ_B питомих опорів металів.



Розв'язання.

1. Позначимо r_A і r_B опори *чверті* відповідних обручів. Для першого підключення омметра точки обруча $BEDF$ мають однакові потенціали, струм у цьому обручі відсутній. Тому, як легко показати, $R_{AC} = \frac{r_A r_B}{r_A + r_B}$.

2. Для другого випадку коло є симетричним відносно площини $AECF$, потенціали точок B, D є однаковими, тому ці точки можна об'єднати в одну (B/D). На рис. 1 показана еквівалентна схема кола (зафарбовані сірим кольором резистори мають опори $r_A/2$, вони відповідають паралельному з'єднанню двох резисторів опором r_A ; опір не зафарбованих резисторів дорівнює r_B). Якщо змінити з'єднання в точці B/D , як показано на рис. 2, то отримані «окремі» точки M, N будуть, як і до того, мати однаковий потенціал. Тому їх можна остаточно роз'єднати без зміни опорів кола. Отримуємо паралельне з'єднання трьох окремих ділянок.

Зі співвідношення $\frac{1}{R_{AE}} = \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A} + \frac{1}{2r_B + r_A r_B / (r_A + r_B)}$ маємо

$$R_{AE} = \frac{r_A r_B (3r_A + 2r_B)}{2(r_A + r_B)(2r_A + r_B)}$$

3. Отже, $\frac{R_{AC}}{R_{AE}} = \frac{2(2r_A + r_B)}{3r_A + 2r_B}$. Звідси легко отримати, що відношення $\frac{r_A}{r_B} = \frac{2(R_{AC} - R_{AE})}{4R_{AE} - 3R_{AC}}$. Оскільки розміри обручів однакові, відношення питомих опорів є таким самим: $\frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{2(R_{AC} - R_{AE})}{4R_{AE} - 3R_{AC}} = 1,5$.

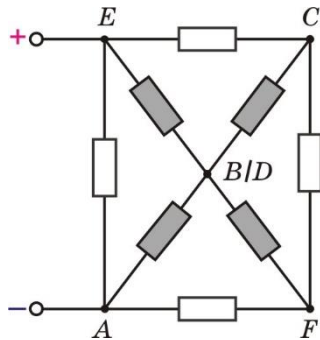


Рис. 1

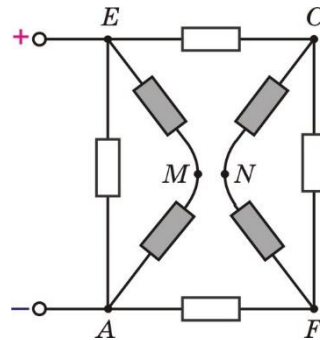
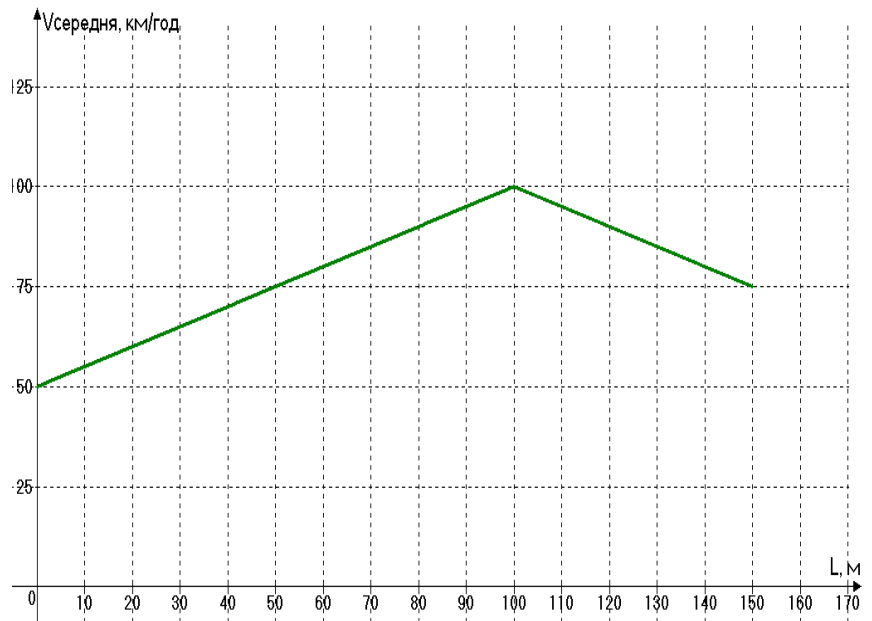


Рис. 2

2. «І знов середня швидкість»

Машина їде по горизонтальній прямій ділянці дороги. У момент проїзду машини повз автобусну зупинку пасажир почав будувати графік залежності середньої швидкості машини на шляху L , пройденому після автобусної зупинки, від величини L . За наведеним графіком середньої швидкості руху машини від пройденної відстані:



- Знайдіть середню швидкість на шляху від 50 до 125 м;
- Отримайте та зобразіть графічно залежність пройденого шляху від часу руху;
- Чи немає в цьому русі чогось підозрілого та нефізичного? Якщо так, то вкажіть, чому ви так вважаєте?

Розв'язання.

А) Час доїзду до 50 м: $t_1 = \frac{50 \text{ м}}{V_{\text{середня}}(50 \text{ м})} = \frac{50 \text{ м}}{75 \frac{\text{км}}{\text{год}}} = 2,40 \text{ с.}$

$V_{\text{середня}}(125 \text{ м})$ легко визначити через середнє між значеннями 75 $\frac{\text{км}}{\text{год}}$ та 100 $\frac{\text{км}}{\text{год}}$ використовуючи лінійність функції на спадній ділянці.

Час доїзду до 125 м: $t_2 = \frac{125 \text{ м}}{V_{\text{середня}}(125 \text{ м})} = \frac{125 \text{ м}}{87,5 \frac{\text{км}}{\text{год}}} \approx 5,14 \text{ с.}$

Тоді час руху в потрібному діапазоні $\Delta t = t_2 - t_1 \approx 2,74 \text{ с.}$

Середня швидкість в даному інтервалі за визначенням середньої швидкості: $V_{\text{середня}} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{125 \text{ м} - 50 \text{ м}}{2.74 \text{ с}} \approx 27.34 \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 98.44 \frac{\text{км}}{\text{год}}$.

Б) Очевидний зв'язок із визначення середньої швидкості: $L = V_{\text{середня}}(L) * t$

Для першої ділянки руху (до 100 м): $V_{\text{середня1}}(L) = a_1 + b_1 * L$, з графіку можна визначити, що $a_1 = 50 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, $b_1 = 500 \frac{1}{\text{год}}$.

Звідси,

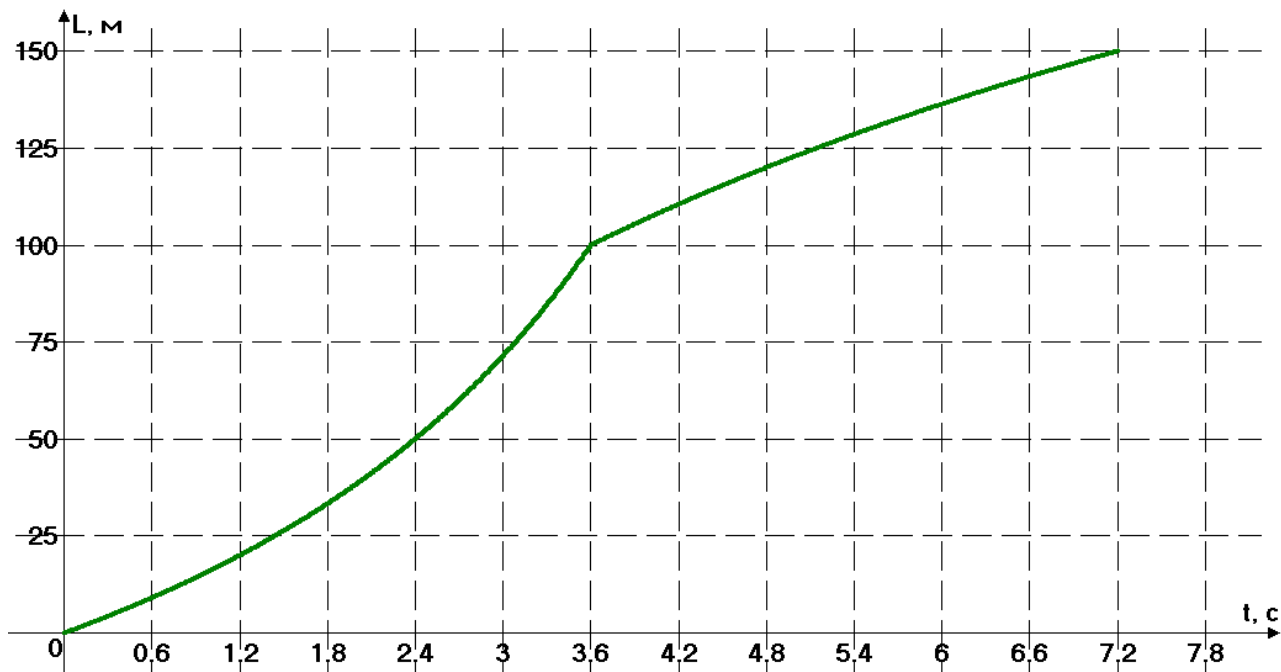
$$L(t) = \frac{a_1 t}{1 - b_1 t}.$$

Аналогічно для другої ділянки руху (після 100 м): $V_{\text{середня2}}(L) = a_2 + b_2 * L$, де $a_2 = 150 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, $b_2 = -500 \frac{1}{\text{год}}$.

Так само на другому етапі

$$L(t) = \frac{a_2 t}{1 - b_2 t}.$$

Побудуємо дані графіки

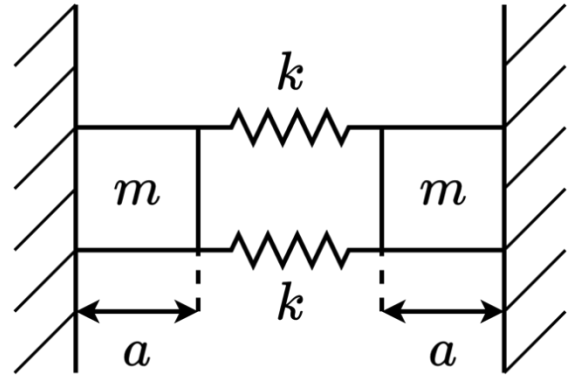


В) Одразу можна помітити як мінімум дві дивні ситуації. Зліва і справа від точки 3.6 с кут нахилу дотичних до графіку різний, а значить швидкість зазнає миттєвого ривку, що неможливо в реальності. Також, якщо уважно подивитись на порядки швидкостей, то зліва від 3.6 с по куту нахилу дотичної до графіка можна зрозуміти, що швидкість машини порядку 2000 км/год. Ну це вже точно штраф за перевищення швидкості!

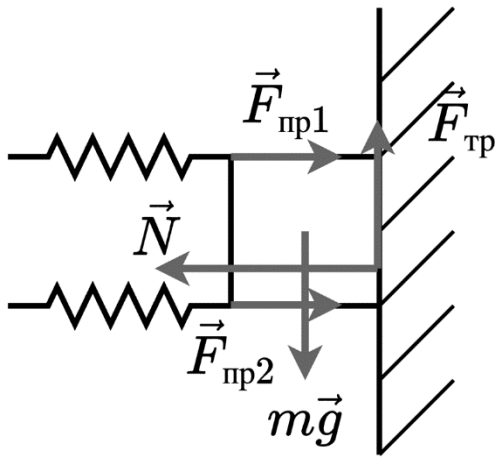
За бажання, використовуючи аналіз похідними, можна перевірити й пікові прискорення. Але вони виходять відносно адекватні (принаймні, не такі, як при підготовці космонавтів) порядку $30 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ або 3g.

3. «Тиснемо-перетиснемо»

Два однакових кубики зі стороною a та масою m з'єднані двома однаковими пружинами як зображено на рисунку. Кожна пружина має жорсткість k та початкову довжину в нестисненому стані L_0 . Систему розміщують між двома вертикальними стінками (див. рисунок). Знайдіть, за якої відстані між стінками система буде в рівновазі. Коефіцієнт тертя між кубиками та стінкою дорівнює μ та $\mu < 1$. Уважати, що пружини залишаються горизонтальними.



Розв'язання.



Розглянемо сили, які діють на кубик, справа: дві сили пружності від пружин $\vec{F}_{\text{пр1}}$, $\vec{F}_{\text{пр2}}$ штовхають вправо, сила реакції опори \vec{N} протидіє вліво, сила тяжіння $m\vec{g}$ тягне його вниз, а сила тертя $\vec{F}_{\text{тр}}$ діє вгору. Тоді умова рівноваги кубика буде:

$$\vec{F}_{\text{пр1}} + \vec{F}_{\text{пр2}} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = 0,$$

або якщо розглянути окремо вертикальні та горизонтальні сили, отримаємо такі два рівняння:

$$\begin{cases} F_{\text{пр1}} + F_{\text{пр2}} = N, \\ mg = F_{\text{тр}}. \end{cases}$$

Оскільки обидві пружини однакові та стиснулись однаково, вони будуть діяти з однаковою силою, за законом Гука $F_{\text{пр1}} = F_{\text{пр2}} = kx$, де x – це стиснення кожної пружини. Для сили тертя спокою, яка діє на кубик, виконується нерівність $F_{\text{тр}} \leq \mu N$. Підставляючи це в систему рівнянь вище, отримаємо:

$$\begin{cases} 2kx = N, \\ mg \leq \mu N. \end{cases}$$

Отже $mg \leq 2\mu kx$, або

$$x \geq \frac{mg}{2\mu k}$$

Таким чином ми знайшли мінімальне стиснення пружин. Оскільки початкова довжина пружин була l_0 , довжина стиснутих пружин буде $(l_0 - x)$. Тоді відстань між стінками буде $(l_0 - x + 2a)$. Тобто відстань між стінками має бути менша або рівна

$$l_0 + 2a - \frac{mg}{2\mu k}$$

Але, вона не повинна бути меншою за $2a$. Саме тому є додаткова умова на параметри системи, при яких взагалі можлива така рівновага: $l_0 \geq \frac{mg}{2\mu k}$.

Відповідь: відстань між стінками має бути менша або рівна $l_0 + 2a - \frac{mg}{2\mu k}$ за умови, що $l_0 \geq \frac{mg}{2\mu k}$.

Примітка: Додатково можна розглянути умову рівноваги моментів сил які діють на кубики. Для цього за вісь найзручніше обрати центр мас кубика – відносно нього момент сили тяжіння дорівнює нулю, та моменти сил пружності компенсуються. Залишається рівність моментів сил від сили реакції опори та сили тертя: $F_{\text{тр}} \frac{a}{2} = Nu$, де u – плече сили реакції опори. З умови $\mu < 1$ випливає, що $F_{\text{тр}} < N$, а отже $u < \frac{a}{2}$, тобто сила реакції опори має діяти в межах кубика. Це не викликає жодних протиріч, тому ця умова не накладає додаткових обмежень. Зауважте, що при $\mu > 1$ можлива ситуація коли кубики не проковзують, але завалюються в середину.

4. «Дрова і вода»

Відомо, що при згорянні вологої деревини виділяється менша кількість теплоти, ніж при згорянні сухої. У таблиці наведені дані для тепловиділення і густини трьох порід деревини за різної вологості й умови повного згорання.

А) Не використовуючи інших довідкових даних по деревині, **проаналізуйте** таблицю, **знайдіть спільне** у різних видах деревини, **висуньте** гіпотезу і **дозаповніть таблицю** розрахованими чисельними значеннями.

Б) За **якої відносної вологості** деревини та взагалі не буде горіти? Початкова температура деревини, яку підкладають у вогонь, 20°C . Уважайте, що дрова горять за температури 800°C , всі утворені речовини нагріваються до цієї температури, питома теплота пароутворення води при 100°C дорівнює $2,3 \text{ МДж/кг}$, а питома теплоємність водяної пари така ж як і льоду $2,1 \text{ кДж/(кг}^{\circ}\text{C)}$

Одна калорія – це кількість теплоти, яка необхідна, щоб 1 г води з питомою теплоємністю $4,18 \text{ Дж/(г}^{\circ}\text{C)}$ нагріти на 1°C . Вологість у таблиці – відношення маси води у деревині до маси цієї ж деревини в абсолютно сухому стані. Зазначимо, що нагрівання самої сухої деревини до температури горіння вже враховано у значенні теплотворної здатності.

	Вологість 0%	Вологість 12%			Вологість 25%		
	Теплотворна здатність, ккал/кг	Теплотворна здатність, кВт·год/м ³	Густина, кг/м ³	Теплотворна здатність, ккал/кг	Теплотворна здатність, кВт·год/м ³	Густина, кг/м ³	Теплотворна здатність, ккал/кг
Береза		3000	630		2700	650	
Сосна		2400	500		2200	530	
Ялина		2100	440			470	

Розв'язання.

А) Спочатку дозаповнимо в таблиці те, що можна просто перерахувати.

Теплотворна здатність на одиницю об'єму Q/V і теплотворна здатність на одиницю маси (питома теплота згоряння q) пов'язані співвідношенням:

$$q = Q/m = Q/(\rho V) = \frac{Q/V}{\rho}.$$

Отже, перерахунковий коефіцієнт:

$$q = \frac{Q/V}{\rho} = \left\{ \frac{Q/V}{\rho} \right\} \frac{\frac{\text{кВт} \cdot \text{год}}{\text{м}^3}}{\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}} = \left\{ \frac{Q/V}{\rho} \right\} \frac{1000\text{Вт} \cdot 3600 \text{ с}}{\text{кг}} = \left\{ \frac{Q/V}{\rho} \right\} \frac{3600 \text{ ккал}}{4,18 \text{ кг}}$$

$$\approx 861 \cdot \left\{ \frac{Q/V}{\rho} \right\} \frac{\text{ккал}}{\text{кг}}.$$

Так, для берези за вологості 12% маємо: $861 \cdot \frac{3000 \text{ ккал}}{630 \text{ кг}} = 4100 \frac{\text{ккал}}{\text{кг}}$. Також робимо для всіх можливих випадків і частково заповнюємо таблицю:

Бачимо схожість значень питомої теплоти згоряння різних порід деревини за однакової вологості.

	Вологість 0%	Вологість 12%			Вологість 25%		
	Теплотворна здатність, ккал/кг	Теплотворна здатність, кВт·год/м ³	Густина, кг/м ³	Теплотворна здатність, ккал/кг	Теплотворна здатність, кВт·год/м ³	Густина, кг/м ³	Теплотворна здатність, ккал/кг
Береза		3000	630	4100	2700	650	3580
Сосна		2400	500	4130	2200	530	3570
Ялина		2100	440	4110		470	

Це може свідчити про спільне значення теплотворної здатності абсолютно сухої деревини (вологість 0%). Знайдемо його з тих даних для 12% і 25%, які у нас зараз вже є. З енергетичних міркувань суха деревина, згоряючи, має нагрівати воду, потім випаровувати її та розігрівати водяну пару до 800°C (за умовою задачі). Справді, коли ми підкидаємо у вогнище дрова, всі продукти згоряння разом з полум'ям піднімаються вгору. Отже, можна записати:

$$qm = q_0 m_c - c_v m_v \Delta t_{80} - r m_v - c_p m_v \Delta t_{700},$$

звідки

$$q_0 = q \frac{m}{m_c} + \frac{m_v}{m_c} (c_v \Delta t_{80} + r + c_p \Delta t_{700}) = q \frac{m}{m_c} + \frac{m_v}{m_c} \cdot 4,1 \text{ МДж/кг},$$

де m – маса вологих дров, m_c – маса сухої речовини в них, m_v – маса води в дровах.

За умовою задачі: «Вологість у таблиці – відношення маси води у деревині до маси цієї ж деревини в абсолютно сухому стані». Позначимо це відношення через $x = \frac{m_v}{m_c}$. Тоді:

$$q_0 = q(1 + x) + x \cdot 4,1 \text{ МДж/кг} = q(1 + x) + x \cdot 980 \text{ ккал/кг}.$$

Підставляємо значення $x = 0,12$ і $x = 0,25$ та знаходимо

	Вологість 0%		Вологість 12%			Вологість 25%		
	Теплотворна здатність q_0 , ккал/кг		Теплотворна здатність, кВт·год/м ³	Густина, кг/м ³	Теплотворна здатність, ккал/кг	Теплотворна здатність, кВт·год/м ³	Густина, кг/м ³	Теплотворна здатність, ккал/кг
Береза	4710 0,12	4720 0,25	3000	630	4100	2700	650	3580
Сосна	4740 0,12	4710 0,25	2400	500	4130	2200	530	3570
Ялина	4720 0,12		2100	440	4110		470	

Висуємо гіпотезу, що теплотворна здатність сухої речовини однакова, і візьмемо середнє арифметичне п'яти значень: 4720 ккал/кг. Для цього значення розрахуємо й заповнимо дві останні клітинки таблиці для ялини.

	Вологість 0%		Вологість 12%			Вологість 25%		
	Теплотворна здатність q_0 , ккал/кг		Теплотворна здатність, кВт·год/м ³	Густина, кг/м ³	Теплотворна здатність, ккал/кг	Теплотворна здатність, кВт·год/м ³	Густина, кг/м ³	Теплотворна здатність, ккал/кг
Береза	4710 0,12	4720 0,25	3000	630	4100	2700	650	3580
Сосна	4740 0,12	4710 0,25	2400	500	4130	2200	530	3570

Ялина	4720 0,12	4720 0,25	2100	440	4110	1950	470	3580
-------	--------------	--------------	------	-----	------	------	-----	------

Б) «За якої відносної вологості деревини та взагалі не буде горіти?»

Відносна вологість – це відношення маси води до маси усієї речовини $\varphi = \frac{m_B}{m_C + m_B}$, що

відрізняється від просто вологості $x = \frac{m_B}{m_C}$: $\varphi = \frac{x}{1+x}$. За нашою моделлю формула

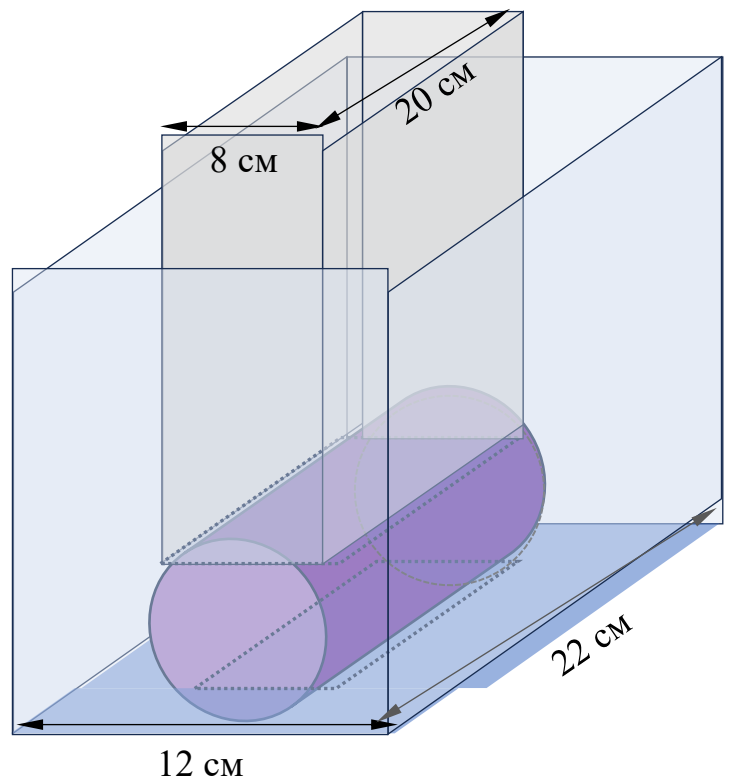
розрахунку зв'язку теплотворної здатності сухої і вологої деревини:

$$q(1 + x) + x \cdot 980 \text{ ккал/кг} = q_0 \approx 4720 \text{ ккал/кг.}$$

Звідси, вважаючи, що деревина не буде горіти й підтримувати полум'я, якщо $q = 0$ ккал/кг, маємо $x \cdot 980 \text{ ккал/кг} \approx 4720 \text{ ккал/кг}$ тобто $x \approx 4,82$, звідки максимальна відносна вологість, за якої дрова вже не горітимуть: 83%.

5. «Циліндр в акваріумі»

Високий акваріум з основою 12 см * 22 см посередині дна має прямокутний отвір 6 см*20 см. Для того, щоб вода не витікала, перед заповненням акваріуму на його отвір спробували поставити вертикальний порожній короб, зроблений з міцного тонкого прозорого пластику у формі паралелепіпеду без двох протилежних основ розмірами 8 см × 20 см. Але співпадіння довжин отвору і коробу не дозволили забезпечити герметичність. Тоді в отвір спочатку поклали сталевий циліндр діаметром 10 см і висотою 20 см, а вже на нього наділи зверху короб (див. схематичний Рис.).



Стінки короба і циліндру вертикальні. В акваріум почали наливати воду зі сталою швидкістю 100 мл за секунду. А) **З якою швидкістю** (у см/с) рухається лінія розділу води і повітря: вздовж вертикальної стінки акваріуму та вздовж бокової (циліндричної) поверхні циліндру?

Б) Для обох випадків знайдіть **залежність швидкостей від висоти рівня води** (або іншої наочної координати) та

В) їх **максимальне і мінімальне значення**.

Г) **Чи може** сталевий циліндр почати трохи «підстрибувати» і періодично випускати воду при достатньо високих стінках акваріуму і жолобу через деякий час після початку заповнення акваріуму водою? Якщо так, **через який час**, якщо ні, **чому?**

Розв'язання. Введемо позначення $q = 100$ мл/с, сторони дна акваріуму $a=12$ см, $b=22$ см, радіус циліндру $R=5$ см, його довжина, а також більші сторони отвору і основи коробу $l=20$ см. Менші сторони отвору і коробу, відповідно, $c=6$ см і $d=8$ см. Швидкості руху лінії розділу води і повітря вздовж вертикальної стінки акваріуму та вздовж бокової поверхні циліндру позначимо v і u , відповідно.

А,Б,В) Розглянемо невеликий проміжок часу Δt (Рис.1.). З подібності трикутників або з визначення синусу кута маємо

$$\frac{v}{u} = \frac{r}{R} = \sin\alpha,$$

тобто

$$u = \frac{v}{\sin\alpha} = v \frac{R}{r}.$$

За невеликий проміжок часу Δt об'єм води ΔV розходиться по площі $ab - 2rl$, отже

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = q = (ab - 2rl)v.$$

Звідси

$$v = \frac{q}{ab - 2rl} = \frac{q}{ab - 2Rl\sin\alpha}.$$

Максимальне значення швидкості буде за максимального r , мінімальне – за мінімального:

$$v_{\max} = \frac{q}{ab - 2Rl} = \frac{25}{16} \text{ см/с} \approx 1,56 \text{ см/с.}$$

$$v_{\min} = \frac{q}{ab - cl} = \frac{25}{36} \text{ см/с} \approx 0,69 \text{ см/с.}$$

Після занурення циліндру швидкість буде

$$v = \frac{q}{ab - dl} = \frac{25}{26} \text{ см/с} \approx 0,96 \text{ см/с.}$$

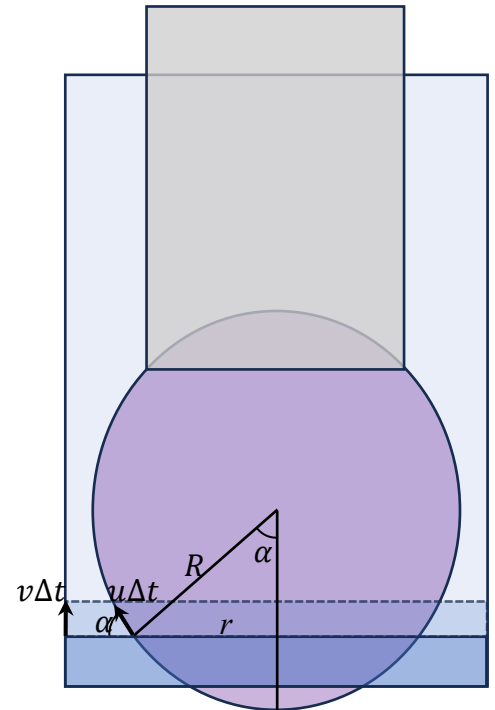
Як бачимо з формули й рисунку, координата r є і зручною, і наочною.

Швидкість уздовж бокової (циліндричної) поверхні циліндру

$$u = v \frac{R}{r} = \frac{qR}{abr - 2lr^2}.$$

Для зручності аналізу виділяємо повний квадрат у знаменнику

$$u = \frac{qR}{2l \left(\left(\frac{ab}{4l} \right)^2 - \left(r - \frac{ab}{4l} \right)^2 \right)}.$$



Найменшою швидкість u буде, коли повний квадрат у знаменнику дорівнюватиме своєму мінімальному значенню, тобто, коли $r = \frac{ab}{4l} = 3,3$ см. Це значення більше початкового значення $r = \frac{c}{2} = 3$ см. Отже, спочатку швидкість буде зменшуватись до

$$u_{\min} = \frac{8qRl}{a^2b^2} \approx 1,15 \text{ см/с},$$

потім збільшуватись до максимального значення коли $r = R$,

$$u_{\max} = \frac{qR}{2l \left(\left(\frac{ab}{4l} \right)^2 - \left(R - \frac{ab}{4l} \right)^2 \right)} = \frac{q}{ab - 2lR} = \frac{25}{16} \text{ см/с} \approx 1,56 \text{ см/с},$$

а далі знову зменшуватись до граничного значення $\frac{125}{104} \text{ см/с} \approx 1,2 \text{ см/с}$, де циліндр дотикається коробу ($r = \frac{d}{2} = 4$ см).

Г) Оскільки циліндр не повністю охоплений водою, безпосередньо використати вираз сили Архімеда для нього не можна. Уявимо, що у циліндрі є два тонькі горизонтальні розрізи: на рівні дна і на рівні нижньої основи короба, які заповнила вода і тисне водночас вгору і вниз (Рис.2). Тоді сили її тиску на циліндр зрівноважені, але середня частина циліндру вже охоплена водою і на неї діє сила Архімеда $\rho_B g V$, де V – об'єм циліндру без двох зрізаних частин, які знаходяться через добуток різницю площі частини кола і трикутника на довжину циліндру. Тоді проекція на вертикальну вісь ОУ рівнодійної сили, що діє на повністю занурений циліндр при заповненні акваріума водою до висоти h :

$$F_y = N + \rho_B g V - mg - \rho_B g h \cdot 2r_1 l + \rho_B g \left(h - \sqrt{R^2 - r_1^2} - \sqrt{R^2 - r_2^2} \right) \cdot 2r_2 l.$$

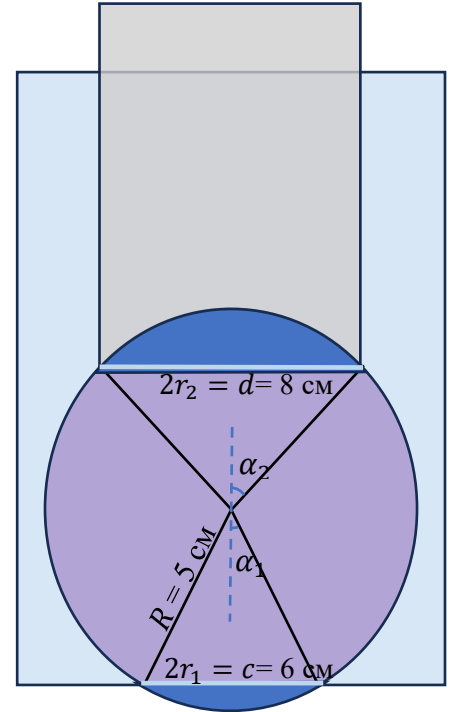
Оскільки вода підтікає знизу під циліндр на більш ефективній площі, ніж тисне згори, у деякий момент циліндр відірветься, завдяки збільшенню некомпенсованого тиску. Вода почне витікати повз нього вниз поки зі зменшенням h його знову не притисне до отвору. Виникне явище, яке називають автоколиваннями.

У рівновазі $F_y = 0$. Циліндр починає відриватися, коли $N=0$. Отже,

$$h = \frac{m - \rho_B V + \rho_B \left(\sqrt{R^2 - r_1^2} + \sqrt{R^2 - r_2^2} \right) \cdot 2r_2 l}{2l(r_2 - r_1)\rho_B} =$$

$$= \frac{(\rho_{Fe} - \rho_B)\pi R^2 + \rho_B \left[\Delta S_1 + \Delta S_2 + \left(\sqrt{R^2 - r_1^2} + \sqrt{R^2 - r_2^2} \right) \cdot 2r_2 \right]}{2(r_2 - r_1)\rho_B} \approx 303 \text{ см},$$

де було враховано, що об'єм обрізаного зверху й знизу циліндра $V = (\pi R^2 - [\Delta S_1 + \Delta S_2])l$, а $\Delta S_1 + \Delta S_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)R^2 - r_1\sqrt{R^2 - r_1^2} - r_2\sqrt{R^2 - r_2^2} \approx 15,27 \text{ см}^2$.



Знайдемо тепер час, за який акваріум з високими стінками і коробом наповниться водою до висоти 303 см. Загальний об'єм води дорівнюватиме $V_{\text{заг}} = abh - V - V_{\text{кор}} = abh - V - dl(h - 7\text{см}) = 31,367 \text{ л}$. Поділимо цей об'єм на швидкість наповнення акваріуму водою $q = 100 \text{ мл/с}$ і отримаємо час **5 хв 14 с**.

Задачі запропонували: 1. Гельфгат І.М., 2. Олійник А.О., 3. Рідкокаша І.П., 4-5 Орлянський О.Ю.